Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Синхронизация автоколебаний двух осцилляторов в случае близком к вырожденному резонансу 1:3

Научный руководитель – Куликов Дмитрий Анатольевич

Канцидал Екатерина Сергеевна
Студент (магистр)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: Kisa.rudnyova@mail.ru

Рассматривается система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_1 + x_1 + c_1x_2 = -\dot{x}_1x_1^2, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_2 + c_2x_1 + x_2 = -\dot{x}_2x_2^2, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_j = x_j(t), \ \ j = 1, 2; \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1; \ \ c_1, c_2 > 0.$

Система (1) была приведена в монографии [1], в качестве математической модели двух связанных осцилляторов, если связь "прямая". Для системы дифференциальных уравнений (1) рассмотрим вопрос о возможности синхронизации колебаний, т.е. наличия устойчивых периодических решений, описывающих совместные колебания первого и второго осциллятора.

Приведём вариант достаточных условий для синхронизации колебаний.

Рассмотрим линеаризованную в нуле при $\varepsilon = 0$ систему дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_1 + c_1x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_2 + c_2x_1 + (1 + \delta_2\varepsilon)x_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

При $c_1c_2 = \dfrac{16}{25}$ для собственных её частот реализуется резонанс 1:3. В этом случае динамику решений системы (1) определяет поведение рещений следующей системы дифференциальных уравнений для комплеснозначных функций $z_1(s), z_2(s), \ \ s = \varepsilon t$.

$$\begin{cases} z_1'(s) = z_1 - \dfrac{a}{4}z_1|z_1|^2 - \dfrac{a}{2}z_1|z_2|^2 + \dfrac{b}{12}z_2^2, \\ z_2'(s) = z_2 - \dfrac{a}{2}z_2|z_1|^2 - \dfrac{a}{4}z_2|z_2|^2 + \dfrac{b}{4}z_1\overline{z_2}^2, \end{cases} \tag{3}$$

где $a = \dfrac{25c_1^2}{16} + 1, \ \ b = \dfrac{25c_1^2}{16} - 1.$

У системы дифференциальных уравнений (3) указаны варианты выбора c_1, при которых она имеет периодические решения $z_1(s), z_2(s)$ с одинаковым периодом и равной нулю разностью фаз. Среди них есть устойчивые периодические решения. Им соответствует синхронный режим колебаний для системы (1). Кроме этих решений система (3) имеет решения $z_1(s), z_2(s)$ с одинаковым периодом, но разностью фаз равной π. Устойчивым решениям такого типа соответствуют противофазные колебания системы дифференциальных уравнений (1).

Отметим, что противофазные колебания также достаточно типичны для динамики связанных автоколебательных систем, как и полностью синхронные колебания.

Источники и литература

1) Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400с.