Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Классификация алгебраических инвариантов для динамической системы Руклиджа

Научный руководитель – Белова Мария Владимировна

Илюхин Денис Олегович
Студент (магистр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: dennic.96@mail.ru

Классификация алгебраических инвариантов для динамической системы Руклиджа

Двойную конвекцию для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска описывает трехмерная динамические система Руклиджа [1]:

$$x' = -\alpha x + \beta y - yz;\ y' = x;\ z' = -z + y^2, \tag{1}$$

где α и β параметры.

Система Руклиджа — это семейство квадратичных систем в трехмерном пространстве. Квадратичные системы в $\mathbb{R}^3$ являются простейшими системами после линейных. Примерами таких систем являются система Лоренца, система Рёсслера, система Рикитаке и другие. В последние годы данные системы активно изучаются. В работе [2] исследуется интегрируемость системы Руклиджа, в частности, существование первых интегралов Дарбу и аналитических первых интегралов. Можно заметить, что для данной системы не проводился поиск алгебраических инвариантов и алгебраически инвариантных решений. Более того, до настоящего времени не было найдено ни одной траектории с явным представлением.

Многочлен $F(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}[\omega_1, \omega_2] \setminus \mathbb{C}$ называется алгебраическим инвариантом автономного алгебраического обыкновенного дифференциального уравнение порядка $k > 1$, если любая отличная от постоянной функция $\omega(z)$, удовлетворяющая соотношению $F(\omega, \omega_z) = 0$, одновременно является решением данного уравнения. Функцию $\omega(z)$ будем называть алгебраически инвариантным решением исследуемого уравнения. Аналогичное определение можно дать для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгебраические инварианты порождают алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, совместные с исходным уравнением или системой. Это определение тесно связано с понятием вспомогательного уравнения, введенным М. Мюзетт и Р. Контом [3, 4], и с определением алгебраических бегущих волн для автономных дифференциальных уравнений в частных производных, данным А. Гасуллом и Х. Джакомини [5]. Метод вспомогательного уравнения М. Мюзетт и Р. Конта позволяет находить алгебраически инвариантные решения, только если они являются мероморфными функциями, в то время как метод дробно-степенных рядов [6] применим и в немероморфном случае. Большое преимущество метода рядов Пюизе заключается в том, что данный метод позволяет находить не некоторые, а все алгебраически инвариантные решения.

Основным результатом работы является следующая **Теорема**: Динамическая система Руклиджа имеет неприводимые алгебраические инварианты тогда и того тогда, когда параметры $(\alpha,\ \beta)$ принимают одно из следующих значений: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(2, -\dfrac{15}{16}\right)$, $\left(2, \dfrac{105}{16}\right)$, $\left(\dfrac{7}{8}, \dfrac{15}{256}\right)$, $\left(\dfrac{13}{2}, -\dfrac{15}{2}\right)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант №19-71-10003

Источники и литература

1) Rucklidge, A.M., Chaos in models of double convection, Journal of Fluid Mechanics, vol. 237, 1992, pp. 209—229.
2) Lima M., Llibre J., Valls C., Integrability of the Rucklidge system, Nonlinear Dynam., vol. 77, 2014, pp. 1441–1453.
3) Conte R., Musette M., Elliptic general analytic solutions, Studies in Applied Mathematics vol. 123, 2009, pp. 63–81.
4) Musette M., Conte R., Analytic solitary waves of nonintegrable equations, Physica D. vol. 181, 2003, pp. 70–79.
5) Gasull A., Giacomini H., Explicit traveling waves and invariant algebraic curves, Nonlinearity, vol. 28, 2015, pp. 1597–1606.
6) Demina M.V. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 140, 2004