Численное моделирование стационарных течений подземных вод в условиях переменной насыщенности

Ануприенко Денис Валерьевич

Аспирант, инженер

Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука Российской академии наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, Москва, Россия

E-mail: denis-anuprienko@yandex.ru

***Научный руководитель** — Капырин Иван Викторович*

Математическое моделирование течения подземных вод в настоящее время широко применяется для решения различных гидрогеологических задач, таких как оценка водных запасов или обоснование безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов. В случае рассмотрения объектов в приповерхностной зоне, где поры среды заполнены водой лишь частично, течение подземных вод описывается уравнением Ричардса [1]

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} + S(h) \cdot s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K_r(h) \mathbb{K} \nabla h) = Q, \tag{1}$$

где θ – объемное влагосодержание, зависящее от напора воды h, $S = \theta/\theta_{\max}$ – насыщенность, s_{stor} – коэффициент упругой емкости, K_r – относительная проницаемость среды, $\mathbb{K}$ – тензор фильтрации (матрица размера 3×3), Q – объемные источники и стоки.

Часто интерес представляет решение стационарного уравнения Ричардса

$$-\nabla \cdot (K_r(h) \mathbb{K} \nabla h) = Q. \tag{2}$$

Дискретизация уравнения (2) на неструктурированных сетках с помощью различных схем метода конечных объемов приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона. Основной проблемой является подбор начального приближения, что особенно непросто в случае задач с резко меняющимся и анизотропным тензором фильтрации $\mathbb{K}$.

Для преодоления этих проблем ранее использовался метод установления [2], в котором уравнение (1) решается до установления течения. Использование неявной схемы по времени означает применение метода Ньютона и в рамках метода установления, но сходимость можно улучшать, уменьшая размер шага по времени. Тем не менее, для ряда задач метод установления дает крайне жесткие ограничения на размер шага по времени и неприемлемое время расчета.

В данной работе описывается специальный метод подбора начального приближения для метода Ньютона для решения уравнения (2) – *метод продолжения* [3]. В этом методе уравнение (2) параметризуется следующим образом:

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K}(h, q)\mathbb{K}\nabla h) = Q, \tag{3}$$

где q – *параметр продолжения*, а функция $\mathcal{K}(h, q)$ такова, что $\mathcal{K}(h, 0) \equiv 1$ и $\mathcal{K}(h, 1) \equiv K_r(h)$. Таким образом, при $q = 0$ уравнение (3) является линейным уравнением, а при $q = 1$ – исходным уравнением (2). Решив простое линейное уравнение с $q = 0$, можно применить метод Ньютона с $q > 0$, подав ранее полученное решение в качестве начального приближения; такими шагами q увеличивается до 1.

Сравнение методов установления и продолжения на модельных и реальных задачах стационарной фильтрации подземных вод в условиях переменной насыщенности показало преимущество метода продолжения. Сравнение двух вариантов задания функции $\mathcal{K}(h, q)$ — степенного и линейного — на различных задачах показало, что явного превосходства нет ни у одного из вариантов.

Литература

1. Bear J., Cheng A. H. D. Modeling groundwater flow and contaminant transport. – Springer Science & Business Media, 2010. – V. 23.
2. Anuprienko D. V., Kapyrin I. V. Modeling groundwater flow in unconfined conditions: numerical model and solvers' efficiency. // Lobachevskii Journal of Mathematics 39, №7, 2018, P. 867–873.
3. Anuprienko D., Kapyrin I. Nonlinearity continuation method for steady-state groundwater flow modeling in variably saturated conditions //arXiv preprint arXiv:2008.00730. – 2020.