Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Унарные алгебры без собственных подалгебр

Научный руководитель – Артамонов Вячеслав Александрович

Лата Александр Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: alex.lata@yandex.ru

Унарной алгеброй называется алгебра, сигнатура которой состоит из унарных символов.

Любая унарная алгебра может быть интерпретирована как автомат без выхода, как полигон над полугруппой либо как ориентированный псевдограф.

Подалгебра универсальной алгебры называется *собственной*, если она отлична от самой алгебры.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Определения и утверждения теории графов можно найти в [1].

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ – произвольная унарная алгебра. Алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не имеет собственных подалгебр тогда и только тогда, когда после интерпретации некоторых унарных операций из Ω получим сильно связный ориентированный псевдограф.*

Следствие 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ – произвольная унарная алгебра. Алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не имеет собственных подалгебр тогда и только тогда, когда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является сильно связной.*

Следствие 2. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — алгебра, сигнатура которой содержит унарные операции. Если после интерпретации некоторых унарных операций из Ω получим сильно связный ориентированный псевдограф, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не имеет собственных подалгебр.*

Следствие 3. *Автомат без выхода (возможно бесконечный) не имеет собственных подавтоматов тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура — сильно связный ориентированный псевдограф.*

Следствие 4. *Атомами решетки подалгебр унарной алгебры являются ее сильно связные подалгебры, и только они.*

Следствия 3 и 4 являются обобщением результата В. Н. Салия [2] на случай бесконечного автомата без выхода.

Источники и литература

1) Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2009.
2) В. Н. Салий. Универсальная алгебра и автоматы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. - 73 с.