Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Устойчивость по Ляпунову в ветвящихся случайных блужданиях с иммиграцией

Макарова Юлия Константиновна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: ykmakarova@gmail.com

Ветвящиеся случайные блуждания имеют многочисленные применения, в частности, для описания динамики популяций, см. например [1]. Нами будет изучаться одна из таких моделей.

Рассматривается модель симметричного ветвящегося случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, в которой возможно размножение в каждой точке решетки, при этом скорость гибели частиц превышает скорость их рождения. В этом случае общее количество частиц на $\mathbb{Z}^d$ вырождается, см. [2]. Для предотвращения исчезновения популяции вводится процесс иммиграции, при котором среднее число частиц на $\mathbb{Z}^d$ стремится к константе при больших временах.

Целью работы является изучение предельного поведения распределения частиц на $\mathbb{Z}^d$, где $n(t, x)$ — число частиц в момент времени $t > 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. В начальный момент времени в каждой точке на $\mathbb{Z}^d$ находится по одной частице. За малое время каждая частица может погибнуть с вероятностью μdt, где μ - интенсивность гибели, произвести произвольное число потомков, при этом считаем, что интенсивность превращения одной частицы в n равна b_n, $n \geqslant 2$. Введем переменную $\beta = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n$ — интенсивность рождения. Также возможно блуждание по $\mathbb{Z}^d$ с вероятностью попадания из точки x в точку $x + z$ равной $\varkappa a(z)dt$ за малое время dt, где $\sum_{z\neq 0} a(z) = 1$, $a(0) = -1$ и $\varkappa > 0$ — коэффициент диффузии. Таким образом, генератор случайного блуждания имеет вид:

$$(\mathcal{L}\psi)(x) = \varkappa \sum_{z\neq 0}[\psi(x+z) - \psi(x)]a(z).$$

Новым предположением в модели является наличие иммиграции, то есть в каждой точке решетки с вероятностью kdt в системе частиц появляется новая частица, где k - интенсивность иммиграции.

В работе [3] предполагалось, что величины β, μ, k являются постоянными. В [3] были получены дифференциальные уравнения для корреляционных функций $m_n(t, x_1, \ldots, x_n) = E[\prod_{i=1}^{n} n(t, x_i)]$, при этом для функций первого и второго порядка было найдено асимптотическое поведение при $t \to \infty$. Однако рассмотренный случай постоянных коэффициентов далек от реального описания популяционных процессов, поэтому далее будем полагать, что интенсивности имиграции, рождения и гибели зависят от расположения частицы на $\mathbb{Z}^d$, то есть $\beta = \beta(x)$, $\mu = \mu(x)$, $k = k(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$. В этом случае изучается устойчивость по Ляпунову для модели из [3]. Основным результатом является то, что при определенных предположениях на эти функции получается, что решения уравнений в случае постоянных и переменных интенсивностей для корреляционных функций асимптотически эквивалентны.

Источники и литература

1) Е. Б. Яровая. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. Москва. 2007.

2) Han D., Molchanov S., and Whitmeyer J. Population processes with immigration. In book: Modern problems of stochastic analysis and statistics — selected contributions in honor of Valentin Konakov (ed. V. Panov). Springer. 2017. p. 411–434.
3) Han D., Makarova Y., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration. In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10684. Springer, Cham. 2017. p. 401–408.