Секция «Геометрия и топология»

Критическое множество случая Ковалевской в псевдоевклидовом пространстве

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кибкало Владислав Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Интегрируемый случай движения тяжелого твердого тела, открытый С.В. Ковалевской, обобщался для случая псевдоевклидового пространства. Рассмотрим следующую пуассонову структуру на шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6(m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, соответствующую алгебре Ли $so(2,1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & k^2 m_3 & m_2 & 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 \\ -k^2 m_3 & 0 & -m_1 & -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта скобка Ли-Пуассона имеет следующие функции Казимира:

$$f_1 = \langle \gamma, \gamma \rangle_g = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - k^2\gamma_3^2,$$

$$f_2 = \langle m, \gamma \rangle_g = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 - k^2 m_3\gamma_3.$$

Уравнениями Эйлера-Пуассона для такой структуры и гладкой функции H называют следующую систему уравнений:

$$\dot{m} = (gm) \times \frac{\partial H}{\partial m} + (g\gamma) \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \qquad \dot{\gamma} g\gamma \frac{\partial H}{\partial m}.$$

Здесь вектора $m = (m_1, m_2, m_3)$ и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — вектор кинетического момента и единичный вектор оси симметрии. Параметр k^2 задает псведоевклидову структуру, а матрица $g = \mathrm{diag}(1, 1, -k^2)$ — диагональная матрица. Гамильтониан типа Ковалевской $H = 1/2(m_1^2 + m_2^2 - 2k^2 m_3^2) - b_1\gamma_1$ (для произвольного числа $b_1 \in \mathbb{R}$) имеет следующий первый интеграл F, находящийся в инволюции относительно указанной пуассоновой структуры.

$$F = \frac{1}{4}(m_1^2 - m_2^2 + 2b_1\gamma_1)^2 + (m_1 m_2 + b_1\gamma_2)^2.$$

По аналогии с результатами Ковалевской и Кёттера, С.В. Соколовым в [1] было получено разделение переменных для указанных уравнений. Нашей основной целью является исследование фазовой топологии данной системы, т.е. изучение перестроек совместных поверхностей уровня отображения момента (H, F) на неособых орбитах коприсоединенного представления

$$M^4_{a,b} = \{(\mathbf{m}, \gamma) | f_1 = a, f_2 = b\}.$$

На первом шаге мы изучим множество падения ранга отображения момента и устройство его образа на плоскости значений Ohf функций H и F. Отметим, что в данной системе компактность таких слоев неочевидна, и потребует дальнейшей проверки. Примеры перестроек и особенностей, встречающихся в интегрируемых системах с некомпактными слоями, приведены, например, в [2].

Работа выполнена при поддержке фонда Базис, проекта 18-2-6-51-1.

Источники и литература

1) С.В. Соколов, Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных, Труды МАИ, **100**, 2018

2) 2) Д.А. Федосеев, А.Т. Фоменко, Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем, Фунд. и прикл. матем., **21** (6), 217-243, 2016.