

Некомпактность сегмента в пространстве Громова-Хаусдорфа.

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинovich

Борисова Ольга Борисовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия
E-mail: olyaboricova@gmail.com

На множестве всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, существует метрика Громова–Хаусдорфа [1]. Известно, что такая метрика строго внутренняя [2]. В данной работе исследуются свойства сегмента, множества точек, лежащих между двумя данными, в метрическом пространстве Громова–Хаусдорфа. Для пространства всех замкнутых непустых компактов ограниченно компактного метрического пространства с метрикой Хаусдорфа легко показать, что сегмент любых двух точек всегда является компактным. Есть предположение, что в пространстве Громова–Хаусдорфа это свойство уже не выполняется, и даже более сильно, любой сегмент является некомпактным множеством, на что указывают разобранные здесь частные случаи. А именно, мы покажем, что сегмент двух различных конечных метрических пространств и сегмент, в котором одна из данных точек является одноточечным метрическим пространством, а другая — нет, не являются компактами.

Для двух различных конечных метрических пространств существует кратчайшая геодезическая, каждый элемент которой имеет конечную мощность [2]. Зафиксируем один из таких элементов T , а в нем зафиксируем одну произвольную точку t . Построим новое метрическое пространство, заменив точку t в T на симплекс произвольной размерности, с достаточно маленьким расстоянием между своими ребрами. В новом метрическом пространстве расстояние между нетронутыми точками T сохраним, а расстояние между ними и точками симплекса сделаем равным соответствующему расстоянию в T между ними и t . В новом пространстве сохраняются все аксиомы метрики и доказывается, что оно так же как и T лежит в сегменте. С использованием некомпактности шара в пространстве Громова–Хаусдорфа доказывается, что и сегмент не является компактом.

Обоснование некомпактности сегмента одноточечного симплекса и компактного бесконечного метрического пространства аналогично основывается на поиске в сегменте симплексов с неограниченной размерности.

Источники и литература

- 1) Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
- 2) Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., Realizations of Gromov-Hausdorff Distance, ArXiv eprints, arXiv:1603.08850 (2016).