Примеры топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Каргинова Екатерина Евгеньевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,
Москва, Россия
E-mail: virus_kat_@mail.ru

Определение 1. *Плоскостью Минковского называется* $\mathbf{R}^2$ *со скалярным произведением*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$$

.
Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E, задаваемый соотношением:

$$E\colon \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Софокусное семейство квадрик C_λ задается уравнением

$$C_\lambda\colon \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \tag{1}$$

Здесь $a > b > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ - вещественные числа.
Биллиард в эллипсе на плоскости Минковского был исследован в работе [2] В. Драгович и М. Раднович, а именно описан закон отражения в таком биллиарде, первые интегралы движения и посчинан инвариант Фоменко-Цишанга этой системы.
Определение 2. *Простым биллирадом назовем двумерное, связное, плоское, компактное многообразие с кусочно-гладким краем, состоящим из сегментов квадрик семейства (1), попарно пересекающихся под углами, не превышающими* π.
Определение 3. *Топологическим биллиардом называем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой метрикой Минковского, полученное отождествлением (склейкой) простых биллиардов вдоль некоторых выпуклых или прямолинейных сегментов.*
Конструкция топологического биллиарда предложена В. В. Ведюшкиной в работе [3].
Определим отражение в топологическом биллиарде следующим образом - при попадании на ребро склейки точка продолжает движение по другому листу, а при попадании в угол или ребро, не являющееся ребром склейки, точка продолжает движение так же, как и в случае плоской области.
Вышеописанное отражение сохраняет два первых интеграла: квадрат евклидовой длины вектора скорости v_E и каустику траектории λ. Эти функции находятся в инволюции и функционально независимы, следовательно, топологический биллиард интегрируем по Лиувиллю.
Рассмотрим ограничение фазового пространства системы топологического биллиарда на поверхность уровня интеграла v_E - трехмерное многообразие Q^3, называемое изоэнергетической поверхностью. При изменении значения λ получим слоение Q^3 на двумерные

поверхности. Описание этого слоения выполнено мной путем нахождения инвариантов Фоменко-Цишанга - графов с числовыми метками, полностью определяющие топологический тип слоения Лиувилля изоэнергетичской поверности системы. Данный подход подробно изложен в [1].
Итак, на нижеприведенном рисунке представлены яркие примеры топологических биллиардов (в левой колонке) и соответствующие им инварианты Фоменко-Цишанга (в правой колонке). Первые два биллиарда склеены из нескольких простых биллиардов, эквивалентных эллипсу, следующие два биллиарда склеены из простых биллиардов, эквивалентных половине эллипса и четверти эллипса, и последний представленный биллиард склеен из простых биллиардов, эквивалентых эллипсу, половине и четверти эллипса.

Источники и литература

1) 1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999. - Т.1
2) 2.*Драгович, В., Раднович, М.* Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков на эллипсоиде. Фундаментальная и прикладная математика. - 2015. - Т. 20(2), - С. 51-64.
3) 3. *Ведюшкина В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

Иллюстрации

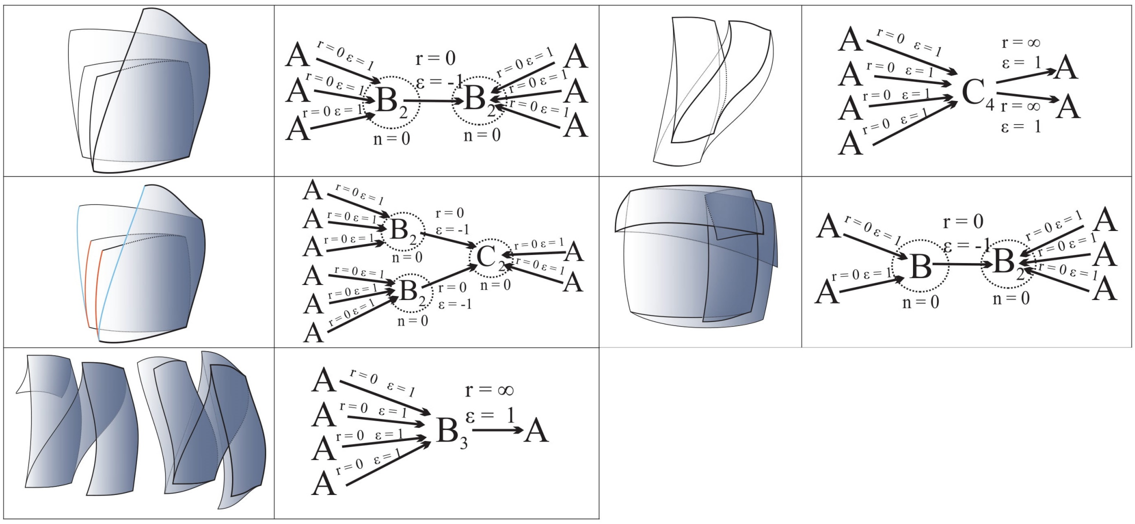

Рис. 1. Примеры топологических биллиардов на плоскости Минковского и соотвествующие им молекулы Фоменко-Цишанга. Во второй строчке сегменты границы, отмеченные синим и красных цветом, также отождествлены между собой.