Топологическая классификация биллиардов на кониках в трёхмерном пространстве

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Белозеров Глеб Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Рассмотрим семейство софокусных коник в $\mathbb{R}^3$, заданных уравнением:

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$-параметр, а $a > b > c > 0$ — фиксированные константы. На эллипсоиде E : $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ рассмотрим область E_0, которая ограничена софокусными с E кониками. В E_0 рассмотрим геодезический биллиард, т.е. предполагаем, что материальная точка движется вдоль геодезической с постоянной скоростью, отражаясь от стенок границы абсолютно упруго. Необходимо изучить и классифицировать все такие биллиарды. Для этого мы будем вычислять инварианты Фоменко-Цишанга — меченые молекулы.

Оказывается, такие системы являются интегрируемыми, т.е. существуют два функционально независимых первых интеграла. Одним из них является модуль вектора скорости H. Существование второго гарантирует теорема Якоби-Шаля.

Теорема.(Якоби, Шаль) Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в $n-$мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.

Таким образом, параметр λ семейства софокусных квадрик явлется первым интегралом системы. С помощью этого факта была произведена классификация областей на эллипсоиде с точностью до лиувиллевой эквивалентности соответствующих им биллиардов. А также были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для области на однополостном гиперболоиде, ограниченной софокусным с ним эллипсоидом.