Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости.

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Галстян Арсен Хачатурович

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ares.1995@mail.ru

Проблема Ферма–Штейнера состоит в нахождении всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества A множества Y минимальна [1]. В настоящей работе проблема исследуется для метрического пространства $Y = H(X)$ компактных подмножеств метрического пространства X, наделенного расстоянием Хаусдорфа. Искомые в Y подмножества, на которых достигается минимум суммы расстояний по всем компактам из некоторого фиксированного конечного множества компактов $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (количество точек в A_i равно m_i, то есть $A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{m_i}\{a_j^i\}$), будем называть компактами Штейнера. Среди них выделяют по включению минимальные и максимальные. Множество решений проблемы Ферма–Штейнера обозначают $\Sigma(A)$. В каждом конкретном случае оно разбивается на непересекающиеся классы, каждый из которых обозначается $\Sigma_d(A)$ и соответствует своему вектору расстояний $d = (d_1, \ldots, d_n)$, где d_i — расстояние Хаусдорфа от компакта Штейнера до A_i. В каждом классе $\Sigma_d(A)$ максимальный компакт единственный, обозначается через K_d. Настоящая работа является продолжением работы [2]. Нами обнаружены новые свойства и признаки компактов Штейнера. Более того, получено необходимое и достаточное условие минимальности компакта Штейнера. Приведём основные результаты работы. Обозначим замкнутый шар с центром в точке a радиуса r через $B_r(a)$.

Утверждение 1. Минимальный компакт Штейнера — конечное множество, количество точек не превосходит $\Big((\sum\limits_{i=1}^{n} m_i) - n + 1\Big)$.

Теорема 1. Компакт $K \in H(X)$ являлся минимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $K \subset K_d$;
2) $K \cap B_{d_i}(a_j^i) \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\forall j \in \{1, \ldots, m_i\}$;
3) $\forall\ p \in K\ \exists\ i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\exists\ j \in \{1, \ldots, m_i\}$ такие, что $\Big(K \setminus \{p\}\Big) \cap B_{d_i}(a_j^i) = \emptyset$.

Теорема 2. Существуют компакт A_i и такая точка $a_j^i \in A_i$, что множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ конечно.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А.Тужилину, а также профессору А.О.Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Источники и литература

1) Ivanov A., Tuzhilin A. Branching Solutions to One–Dimensional Variational Problems. River Edge, 2001.

2) Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // Journal of Geometry, Volume 108, Issue 2, Springer International Publishing, Switzerland, July 2017. pp. 575–590.