Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О вычислении средней временной выгоды при эксплуатации структурированной популяции

Научный руководитель – Родина Людмила Ивановна

Егорова Анастасия Владимировна

Студент (магистр)

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия

E-mail: nastik.e@bk.ru

Рассматривается неоднородная популяция, в которой $x(k)=x_1(k),\ldots,x_n(k)$ — количество особей каждого из n различных видов в момент $k=0,1,2,\ldots$. Введем $U=\{\overline{u}:\overline{u}=(u(0),u(1),\ldots,u(k),\ldots)\}$, где $u(k)=(u_1(k),\ldots,u_n(k))\in[0,1]^n$, $\overline{u}\in U$ — управление сбором. Тогда модель эксплуатации популяции имеет вид

$$x(k+1)=F\big((1-u(k))x(k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots,\tag{1}$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+=x\in\mathbb{R}^n: x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0$, $(1-u_i(k))x_i(k)$ — количество оставшихся особей i-го вида в момент k после сбора, $F(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$, $f_i(x)$ — вещественные неотрицательные функции, такие, что $f_i(0)=0$ и $f_i\in C^2(\mathbb{R}^n_+)$, $i=1,\ldots,n$.

Стоимость всей добываемой продукции равна $z(k)=\sum_{i=1}^n C_i x_i(k)u_i(k)$, где $C_i\geqslant 0$ — стоимость единицы продукции. Для любых $\overline{u}\in U$ и $x(0)\in\mathbb{R}^n_+$ определим среднюю временную выгоду от извлечения ресурса [1]

$$H\big(\overline{u},x(0)\big)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}z(j)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(j)u_i(j)\,.\tag{2}$$

Необходимо построить такой способ эксплуатации популяции, при котором значение функции (2) максимально.

При стационарным режиме эксплуатации, когда $u(k)=u^0=(u_1^0,\ldots,u_n^0)\in[0,1]^n$, система (1) имеет вид

$$x(k+1)=F\big((1-u^0)x(k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots.\tag{3}$$

Пусть $\widehat{x}(u^0)=\big(\widehat{x}_1(u^0),\ldots,\widehat{x}_n(u^0)\big)$ — устойчивая неподвижная точка системы (3) и $A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$ — множество притяжения этой точки. Тогда при стационарном режиме для всех $x(0)\in A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$ выполнено равенство $H\big(\overline{u},x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i\widehat{x}_i(u^0)u_i^0$. Если система (3) имеет устойчивый цикл $B(u^0)=\big\{\beta^0(u^0),\ldots,\beta^{\ell-1}(u^0)\big\}$ длины $\ell\in\mathbb{N}$, тогда $H\big(\overline{u},x(0)\big)=\dfrac{1}{\ell}\sum_{i=1}^n C_i\big(\beta_i^0(u^0)+\ldots+\beta_i^{\ell-1}(u^0)\big)u_i^0$.

Теорема. Предположим, что выполнены условия: 1) функция $D(x)=\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x)-x_i\big)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ и x_i^*; 2) точка $F(x^*)$ — устойчивое положение равновесия системы (3) при $u^0=u^*=\big(1-\frac{x_1^*}{f_1(x^*)},\ldots,1-\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\big)$. Тогда для любого $x(0)$ из некоторой окрестности точки $F(x^*)$ функция (2) достигает максимального значения $H\big(\overline{u}^*,x(0)\big)=D(x^*)=\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*)-x_i^*\big)$ при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}^*=(u^*,\ldots,u^*,\ldots)$.

Источники и литература

1) Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. No. 1. С. 48-58.