Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Построение фундаментального решения одного вырождающегося параболического уравнения

Научный руководитель – Данилов Владимир Григорьевич

Рахель Марк Анатольевич
Студент (бакалавр)
Московский институт электроники и математики, Москва, Россия
E-mail: marakhel@edu.hse.ru

В работе строится асимптотика фундаментального решения задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t} - hx^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad G|_{t=0} = \delta(x - \xi) \tag{1}$$

Сначала находится символ фундаментального решения $V(x, t, h, y, \xi)$, который является решением задачи Коши с главдкими начальными данными

$$\frac{\partial V}{\partial t} - hx^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad V|_{t=0} = e^{-\frac{(x-y-\xi)^2}{2h}} \tag{2}$$

В [1] доказано, что решение задачи (1) задается явной формулой и имеет вид

$$G(x, t, h, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \Big(V(x, t, h, h\frac{\partial}{\partial \zeta}, \xi)\ e^{-\frac{\zeta^2}{2h}} \Big)\Big|_{\zeta=0} \tag{3}$$

С задачей (2) связано специальное Лагранжево многообразие (x, y, p_x, p_y) и система Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(x, p_x), \quad x|_{t=0} = x_0 \\ \dot{p_x} = -H_x(x, p_x), \quad p_x|_{t=0} = x_0 - y - \xi \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{p_y} = 0, \quad p_y|_{t=0} = -p_x|_{t=0} \end{cases}$$

где $H(x, p)$ - функция Гамильтона, отвечающая исходному уравнению (в нашем случае $H(x, p) = x^2 p^2$)

В работе доказано, что решение задачи (1) имеет вид

$$G(x, t, h, \xi) = \delta(x) + G_1(x, t, \xi)(1 + O(h)) \tag{4}$$

где $G_1(x, t, \xi)$ - непрерывная функция, гладкая вне некоторых кривых на $(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)$

Источники и литература

1) Danilov V.G. A Representation of the Delta Function via Creation Operators and Gaussian Exponentials, and Multiplicative Fundamental Solution Asymptotics for Some Parabolic Pseudodifferential Equations // Russian Journal of Mathematical Physics Vol. 3 No. 1 1994, p. 25-40