Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Предельные теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств

Научный руководитель – Маргарян Вачаган Николаевич

Хачатурян Микаел Артурович
Студент (бакалавр)
Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Кафедра математики и математического моделирования, Ереван, Армения
E-mail: khmikayel@gmail.com

Впервые теоремы вложения для функциональных пространств в изотропном случае были получены С. Л. Соболевым. В дальнейшем многими авторами были изучены более общие(анизотропные) пространства Соболева. Почти все эти результаты можно найти в монографии [1]. Однако при изучении определенного класса гипоэллиптических уравнений необходимо было получить теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств Соболева. При доказательстве всех теорем вложения выделяются два случая. Первый случай, когда показатель вложения меньше единицы; второй случай, когда показатель равен единице, то есть имеет место предельный случай. Г. А. Карапетяном в работе [2] были получены теоремы вложения для мультианизотропных пространств, когда показатель вложения меньше единицы. В данной работе доказываются теоремы вложения для этих пространств в предельном случае. В работе используется специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины анизотропности многогранника Ньютона (см. [2]).

***

Для вполне правильного многогранника $\Re$, через $\Re_i^{n-1}$ $(i = 1, 2, \dots, I_{n-1})$ обозначим его $(n-1)$-мерные некоординатные грани. Далее пусть μ^i $(i = 1, 2, \dots, I_{n-1})$ есть такая внешняя нормаль грани $\Re_i^{n-1}$, что уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ $(i = 1, 2, \dots, I_{n-1})$, Через α^i $(i = 1, 2, \dots, M)$ обозначим вершины (отличные от нуля) многогранника $\Re$. Пусть $W_p^{\Re}(R^n) = \{f : f \in L_p(R^n), D^{\alpha_i} f \in L_p(R^n)\, i = 1, 2, \dots, M\}$ есть мультианизотропное пространство Соболева. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть для чисел* p *и* q $(1 < p \le q < \infty)$ *и мультииндекса* $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ *показатель вложения*

$$\chi = \max_{i=1,2\cdots,I_{n-1}} \left((\beta, \mu^i) + |\mu^i| (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \right) = 1 \tag{1}$$

тогда $D^\beta W_p^{\Re}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, *то есть любая функция* $f \in W_p^{\Re}(\mathbb{R}^n)$ *имеет обобщенную производную* $D^\beta f$, *принадлежащую классу* $L_q(\mathbb{R}^n)$, *и для некоторых постоянных* C_1, $C_2 > 0$ *имеет место неравенство*

$$||D^\beta f||_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \sum_{i=1}^{M} ||D^{\alpha^i} f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2}$$

Источники и литература

1) О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. “Наука” , (1975).

2) Г. А. Карапетян Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности. Сиб. мат. Журнал, т. 58, № 3 (2017), 445-460.