Секция «Логика»

Нормальные выводы в натуральном исчислении высказываний

Научный руководитель – Шангин Василий Олегович

Пыльцин Артур Витальевич
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия
E-mail: artur.pyltsin@gmail.com

Зададим натуральное исчисление $\mathbb{CL}$:

- Алфавит (с добавлением константы абсурда $\bot$), понятия формулы и подформулы определим стандартно. В дальнейшем договоримся опускать внешние скобки при записи формул. Запись $\neg A$ будем считать синтаксическим сокращением записи $A \supset \bot$.
- Сформулируем правила вывода:

$$
\begin{array}{llll}
\&_{\mathbf{В}} & \dfrac{A \quad B}{A\&B} & \&_{\mathbf{И}} & \dfrac{A\&B}{A}\,\dfrac{A\&B}{B} \\[2ex]
\vee_{\mathbf{В}} & \dfrac{A}{A\vee B}\,\dfrac{B}{A\vee B} & \vee_{\mathbf{И}} & \dfrac{A\vee B \quad \begin{matrix}(A)\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}(B)\\ C\end{matrix}}{C} \\[2ex]
\supset_{\mathbf{В}} & \dfrac{\begin{matrix}(A)\\ B\end{matrix}}{A\supset B} & \supset_{\mathbf{И}} & \dfrac{A \quad A\supset B}{B} \\[2ex]
\bot_{\mathbf{C}} & \dfrac{\begin{matrix}(\neg A)\\ \bot\end{matrix}}{A} & &
\end{array}
$$

Условимся называть формулу A в правиле $\supset_{\mathbf{И}}$ и формулу C в правиле $\vee_{\mathbf{И}}$ меньшими посылками данных правил. Посылку, не являющуюся меньшей, будем называть большей. Выводы в $\mathbb{CL}$ представлены в древесной форме.

Будем называть максимальной формулой в выводе Π вхождение формулы в Π, являющееся заключением правила введения или $\bot$-правила и большей посылкой правила исключения.

Вывод в $\mathbb{CL}$, не содержащий максимальной формулы, будем называть нормальным. Сформулируем также теорему о нормализации $\mathbb{CL}$:

Теорема 1. *Если $\Gamma \vdash_{\mathbb{CL}} A$, то в $\mathbb{CL}$ существует нормальный вывод A из Γ.*

Впервые формальная процедура построения нормальных выводов в сформулированном Г. Генценем натуральном исчислении была предложена Д. Правицем в [3]. Позднее теоремы о нормализации для различных исчислений были сформулированы и доказаны Д. Леивантом в [1] и Дж.П. Селдином в [4], а также Г. Штолмарком в [5] и Э. Циммерманном в [6]. Однако – как было показано еще в работе Правица – генценовская система первого порядка с логическим оператором дизъюнкции $\vee$ не нормализуема в строгом смысле.

Интерес к этой проблеме обусловлен большим количеством возможностей для анализа выводов, предлагаемых процедурой нормализации, а также фундаментальностью самой теоремы и некоторых следствий из нее (в первую очередь, принципа подформульности).

Пути ее решения предлагались многими специалистами, а наиболее интересными представляются идеи Г. Штолмарка и Э. Циммерманна.

Однако все известные исследования в области нормализации систем натурального вывода посвящены исчислениям, выводы в которых представлены в древесной форме. При этом не существует признанной процедуры нормализации для натуральных исчислений, выводы в которых представлены в линейной форме.

Кроме того, описан алгоритм перестройки древесных выводов в линейные и обратно, предложенный фон Плато в [2]. Кажется интересным исследовать возможности адаптации результатов Д. Правица, Г. Штолмарка и Э. Циммерманна к натуральному исчислению высказываний, выводы в котором представлены в линейной форме, с помощью алгоритма фон Плато, что и будет сделано в этом докладе. В качестве примера натурального исчисления с линейными выводами предлагается использовать исчисление $\mathbb{NP}$, предложенное В.А. Бочаровым и В.И. Маркиным в [7].

Источники и литература

1) Leivant D. Assumption classes in natural deduction. // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1979. Vol. 25. P. 1-4.
2) Plato J. von. From Gentzen to Jaskowski and back: algorithmic translation of derivations between the two main systems of natural deductions. // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46:1/2. P. 65-73.
3) Prawitz D. Natural deduction: A proof-theoretical study. Stockholm, 1965.
4) Seldin J.P. On the proof theory of the intermediate logic MH. // The Journal of Symbolic Logic. 1986. Vol. 52. P. 626-647.
5) Stålmarck G. Normalization theorems for full first order classical natural deduction. // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. P. 129-149.
6) Zimmermann E. Peirce's Rule in Natural Deduction. // Theoretical Computer Science. 2002. Vol. 275. P. 561-574.
7) Бочаров В.А., Маркин В.И. "Введение в логику". М., 2008.