

ОБОВЩЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ КОРНИША–ФИШЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК, ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫБОРКАМ СЛУЧАЙНОГО РАЗМЕРА

Монахов Михаил Михайлович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: mih.monah@gmail.com

Рассмотрим с.в. $X, X_1, X_2, \dots \in \mathbf{R}$ и $N_1, N_2, \dots \in \mathbf{N}$, заданные на одном и том же в. п. $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$. Предположим, что при каждом $n \in \mathbf{N}$ с.в. $N_n \in \mathbf{N}$ независима от с.в. $X_1, X_2, \dots$. Обозначим через $T_{N_n} = N_n^{-1}(X_1 + \dots + X_{N_n})$ статистику, построенную по выборке случайного объема N_n . Пусть с.в. $X, X_1, X_2, \dots$ такие, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}|X|^5 < \infty, \quad \mathbf{E}(X) = \mu, \quad 0 < \text{Var}(X) = \sigma^2, \\ \lambda_3 = \sigma^{-3} \mathbf{E}(X - \mu)^3, \quad \lambda_4 = \sigma^{-4} \mathbf{E}(X - \mu)^4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и предположим, что с.в. X удовлетворяет условию Крамера:

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\mathbf{E}e^{itX}| < 1. \quad (2)$$

Пусть размер выборки $N_n(r)$ имеет отрицательное биномиальное распределение (смещенное на 1) с вероятностью успеха $1/n$

$$\mathbf{P}(N_n(r) = j) = \frac{\Gamma(j+r-1)}{(j-1)!\Gamma(r)} \left(\frac{1}{n}\right)^r \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad r > 0.$$

Ф.р. t -распределения Стьюдента $S_\nu(x)$ – ф.р. вероятности, зависящая от вещественного $\nu > 0$, заданная плотностью

$$s_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Теорема 1. В обозначениях, введенных выше (1), (2) и (3), предположим, что асимптотическое разложение для статистики T_m и асимптотическое разложение для случайного объема $N_n(r)$ с $r > 1$ справедливы с $g_n = \mathbf{E}(N_n(r)) = r(n-1) + 1$. Тогда существует $C = C(r) > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbf{N}$

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leq x\right) - S_{2r;n}(x) \right| \leq C \begin{cases} n^{-r}, & 1 < r < 3/2 \\ \ln(n) n^{-3/2}, & r = 3/2 \\ n^{-3/2}, & r > 3/2 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} S_{2r;n}(x) &= S_{2r}(x) - \frac{\lambda_3 \left((r-1)x^2 - r \right) s_{2r}(x)}{3(2r-1)\sqrt{g_n}} \\ &- \frac{x s_{2r}(x)}{36(2r-1)g_n} \left\{ \frac{2\lambda_3^2 \left((r-2)(r-3)x^4 + 10r(2-r)x^2 + 15r^2 \right)}{2r+x^2} \right. \\ &+ \left. 3\lambda_4 \left((r-2)x^2 - 3r \right) + 9(r-2)(x^2+1) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. (Разложение Корниша–Фишера) Пусть $x = x_\alpha$ и $u = u_\alpha - \alpha$ – квантили нормированной статистики $\sigma^{-1}\sqrt{r(n-1)+1}(T_{N_n(r)} - \mu)$ и предельного t -распределения Стьюдента $S_{2r}(x)$, соответственно. Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение для $n \rightarrow \infty$

$$x = u + \frac{\lambda_3 \left((r-1)u^2 - r \right)}{3(2r-1)\sqrt{g_n}} + \frac{1}{g_n} B_2(u) + \begin{cases} \mathcal{O}(n^{-r}), & 1 < r < 3/2 \\ \mathcal{O}(\ln(n) n^{-3/2}), & r = 3/2 \\ \mathcal{O}(n^{-3/2}), & r > 3/2 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} B_2(u) &= - \frac{(2r+1)u}{2(2r+u^2)} \frac{\lambda_3^2 \left((r-1)u^2 - r \right)^2}{9(2r-1)^2} + \frac{2\lambda_3^2(r-1)u \left((r-1)u^2 - r \right)}{9(2r-1)^2} \\ &+ \frac{u}{36(2r-1)} \left\{ \frac{2\lambda_3^2 \left((r-2)(r-3)u^4 + 10r(2-r)u^2 + 15r^2 \right)}{2r+u^2} \right. \\ &+ \left. 3\lambda_4 \left((r-2)u^2 - 3r \right) + 9(r-2)(u^2+1) \right\}. \end{aligned}$$

Литература

1. Ulyanov V. V. Cornish–Fisher Expansions // International Encyclopedia of Statistical Science, Berlin, 2011, P. 312–315.
2. Бенинг В. Е., Галиева Н. К., Королев В. Ю. Асимптотические разложения для функций распределения статистик, построенных по выборкам случайного объема // Информатика и её применения. 2013. Т. 7, № 2. С. 75–83.
3. Cornish E. A., Fisher R. A. Moments and cumulants in the specification of distributions // Review of the International Statistical Institute, Vol. 5, № 4, 1938, P. 307–320.