

О МИНИМИЗАЦИИ ПРЕДИКАТОВ, ЗАДАЮЩИХ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Джавадова Сурая Нофал гызы

Студентка

Факультет прикладной математики Бакинского филиала МГУ имени

М. В. Ломоносова, Баку, Азербайджан

E-mail: javadovasuraya@gmail.com

Работа относится к теории функциональных систем. Исследуется предикатный способ задания замкнутых классов булевых функций. Предикатный подход широко используется для описания замкнутых классов функций многозначной логики [3], поэтому изучение свойств предикатов, задающих замкнутые классы, является важной задачей.

Как известно [1,2], каждый замкнутый класс булевых функций кроме классов констант, классов O^∞ , O_0^∞ , MO^∞ , MO_0^∞ и двойственных к ним может быть представлен как класс сохранения некоторого булева предиката. Кроме того, для всех замкнутых классов, допускающих предикатное описание, известны размерности классов, т.е. минимально возможное число переменных предиката, задающего класс. В работе рассматривается задача минимизации по другому параметру: мощности множеств истинности предикатов, задающих замкнутые классы. Описаны минимальные предикаты, задающие класс P_2 всех булевых функций и все предполные классы в P_2 . Также описаны все замкнутые классы, которые задаются предикатами, область истинности которых состоит не более чем из трех наборов.

Определение 1. Булевым предикатом называется функция $\rho(x_1, x_2, \dots, x_k): \{0, 1\}^k \rightarrow \{И, Л\}$, где И, Л — истинностные значения и.

Предикат $\rho(x_1, x_2, \dots, x_k)$ будем задавать в виде матрицы X_ρ , в которой по столбцам записаны наборы, удовлетворяющие предикату.

Определение 2. Булева функция $f(y_1, \dots, y_n)$ сохраняет предикат $\rho(x_1, x_2, \dots, x_k)$, если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{k1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{kn})$, удовлетворяющих предикату ρ , набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{k1}, \dots, a_{kn}))$ также удовлетворяет предикату ρ .

Определение 3. Замкнутый класс булевых функций F задается предикатом ρ , если любая функция $f \in F$ сохраняет ρ и никакая функция $g \notin F$ не сохраняет ρ .

Через F_i обозначается пересечение замкнутого класса F с классом T_i , $i=0,1$.

В работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Минимальное число столбцов матриц предикатов, задающих класс P_2 и предполные классы, равно 1 для классов T_0 и T_1 , 2 для P_2 и S , 3 для M , 8 для L .*

Теорема 2. *1. Любой предикат, матрица которого состоит из одного столбца, задает один из классов T_0 , T_1 , $T_0 \cap T_1$.*

2. Любой предикат, матрица которого состоит из двух столбцов, задает один из классов P_2 , S , $S_{0,1}$ или один из классов, указанных в п. 1.

3. Любой предикат, матрица которого состоит из трех столбцов, задает один из классов M , M_0 , M_1 , $M_{0,1}$, $S \cap M$, U_0 , U_1 , $U_{0,1}$, O^2 , O_0^2 , I^2 , I_1^2 или один из классов, указанных в п. 1,2.

Доказательство основано на переборе матриц с учетом свойств инвариантности класса, задаваемого предикатом, относительно перестановки строк и столбцов матрицы предиката и соображений двойственности. Перебор матриц проводился при помощи компьютерных вычислений.

Литература

1. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 136 с.
2. Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1990. 148 с.
3. Lau D. Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. Springer Monographs in Mathematics. Berlin. Springer, 2006. 668 p.