

ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ КИТАЯ

Мальсагов Руслан Магомедович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ruslan.malsagov@gmail.com

В работе рассматривается фондовый рынок с тремя типами агентов: основные держатели акций, покупающие их в целях получения прибыли за счет роста стоимости и дивидендов в долгосрочной перспективе (первый тип) и игроки рынка с краткосрочными стратегиями: профессиональные трейдеры, угадывающие среднесрочное изменение цен (второй тип) и непрофессиональные игроки рынка (третий тип), количественно преобладающие на фондовом рынке Китая, ведущие себя похожим образом, не склонные к риску и резкому изменению своих стратегий, торгующие в зависимости от наблюдаемого изменения цены актива. В рамках настоящей работы для описания агентов третьего типа используется подход приближения среднего поля ([1]).

Пусть, как в [2], запас акций у агентов третьего типа x_t изменяется согласно следующему СДУ:

$$dx_t = \alpha(t, x_t) dt + \sigma dW_t, \quad t \in (0, T_1] \quad x_0 = \tilde{x}_0,$$

где $\alpha: [0, T_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — планы по покупкам/продажам акций (управление, непрерывная функция), σ вещественная константа, W_t винеровский процесс.

Обозначим за $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T_1]$, функцию цены агентов третьего типа, модифицированную по сравнению с предложенной в [2] с помощью добавления под интеграл члена, зависящего от цены актива (изначально модель не отражала этой зависимости, поэтому не являлась достаточно реалистичной):

$$u(t, x) = \max_{\alpha} \mathbb{E} \int_t^{T_1} \left(\ln m(\tau, x_\tau) - \frac{1}{2} \alpha_\tau^2 - \lambda x_\tau^2 + \frac{1}{S_\tau} \frac{dS_\tau}{d\tau} \alpha_\tau \right) d\tau, \quad x_\tau = x.$$

Для нахождения оптимального поведения агентов третьего типа со-

ставляется уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{S_t} \frac{dS_t}{dt} \right) - \lambda x^2 = -\ln m(t, x), \quad (1)$$

где $u(T_1, x) = -\theta(x - a)^2$, $\theta > 0$, $a \in \mathbb{R}$, причем $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{S_t} \frac{dS_t}{dt}$.

Обозначив за $m(t, x)$, $x \in \mathbb{R}, t \in (0, T_1]$, плотность распределения агентов третьего типа по количеству акций, запишем уравнение Фоккера–Планка, которое описывает их эволюцию:

$$\frac{\partial m}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(t, x)m(t, x)) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad (2)$$

где $m(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_0^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\psi_0^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\psi_0 > 0$.

Также введем модифицированное по сравнению с [2] уравнение, описывающее изменение цены акции (S_0 задано):

$$dS_t = S(M_t + \beta_t), \quad M_t = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, z)m(t, z) dz, \quad (3)$$

где β_t — покупки/продажи профессиональных трейдеров.

В настоящей работе было показано, что найденный в [2] полиномиальный анзац решений задачи сохраняется для нового функционала полезности, то есть доказана следующая

Теорема 1. *Решениями задачи (1)–(3) являются функции*

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^2 c_i(t)x^i, \quad m(t, x) = \exp \sum_{j=0}^2 D_j(t)x^j, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T_1]$$

где $c_i(t)$, $D_j(t)$, $i, j = 0, 2$, — решения полученных в настоящей работе обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати.

Литература

1. Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games. // Japanese Journal of Mathematics, 2(1), 229–260, 2007.
2. Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F. A trading execution model based on mean field games and optimal control. // Applied Mathematics, 5, 3091–3116, 2014.