

**ТЕОРЕМА МИЛНОРА О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КАТЕГОРИЯХ
ПРОФИЛЬТРОВАННЫХ И СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ
ПРОСТРАНСТВ**

Жигулич Ирина Александровна

Аспирант

Механико-математический факультет БГУ, Минск, Беларусь

E-mail: irina.zhigulich@gmail.com

Целью работы является модификация известной теоремы Милнора о гомотопической эквивалентности профильтрованных отображений CW-комплексов (см. [1,2]) в категории метрических профильтрованных пространств (т. н. $\mathcal{N}$ -пространств [3]). В этой категории, морфизмами которой являются сохраняющие фильтрацию отображения $\mathcal{N}$ -пространств (т. н. $\mathcal{N}$ -отображения), строится теория ретрактов и экстензоров. Оказывается, что метрическое пространство X является $\mathcal{N}$ -AR-пространством в том и только том случае, когда все элементы фильтрации являются AR-пространствами. Более того, нами установлена следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть $\mathcal{N}$ -отображение $\mathcal{N}$ -ANE-пространств. Тогда отображение f есть $\mathcal{N}$ -гомотопическая эквивалентность в том и только том случае, когда для любого натурального числа n отображение $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Топология CW-комплексов является слабой относительно фильтрации, в результате чего в доказательстве теоремы Милнора существенно используются индуктивные рассуждения. В случае же метрических профильтрованных пространств топология отличается от слабой и поэтому доказательство теоремы 1 требует новой техники. Мы редуцируем исследование $\mathcal{N}$ -гомотопических эквивалентностей к теории ретрактов и экстензоров категории стратифицированных пространств. Объектами данной категории являются $\mathcal{N}$ -пространства, а морфизмами являются отображения, сохраняющие страты фильтрации (т. н. $\mathcal{S}$ -отображения [3]). С помощью специального функтора из категории $\mathcal{N}$ -пространств в категорию $\mathcal{S}$ -пространств доказательство теоремы 1 сводится к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть $\mathcal{S}$ -отображение $\mathcal{S}$ -ANE-пространств. Тогда отображение f есть $\mathcal{S}$ -гомотопическая эквивалентность (а следовательно, и $\mathcal{N}$ -гомотопическая эквивалентность) в том и только том случае, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $f^n = f|_{X^n}: X^n \rightarrow Y^n$ есть гомотопическая эквивалентность.

Литература

1. Постников М. М. Лекции по алгебраической гомотопии. Основы теории гомотопий. М.: Наука, 1984.
2. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Наука, 1995.
3. Агеев С. М., Жигулич И. А., Силаева З. Н. Инъективные объекты категории стратифицированных пространств // Изв. вузов. Матем. 2017. № 2. С. 3–13.