

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЙ МЕТОД СИНТЕЗА БУЛЕВЫХ РЕКУРСИВНЫХ СХЕМ

Жуков Владимир Владимирович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: zhvv117@gmail.com

Задача синтеза, которая впервые была рассмотрена Шенноном (см. [1]), состоит в построении оптимального метода синтеза схем из определённого класса для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности метода вводится функция Шеннона, которая для заданного n равна максимальной сложности булевой функции от n переменных. При этом под сложностью схемы обычно понимается число её элементов или их суммарный, а под сложностью функции — минимальная сложность реализующих её схем. Приведённым весом функционального элемента ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ называется величина $\rho_i = L_i/(k_i - 1)$, а приведённым весом ρ_B базиса B — минимальный приведённый вес ФЭ ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ (см. [2,3]).

О. Б. Лупановым [2] был предложен асимптотически наилучший метод синтеза схем в произвольных полных конечных базисах. С его помощью было установлено, что асимптотика функции Шеннона для схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе, состоящем из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, равна $2^n/n$, а в произвольном конечном полном базисе B — $\rho_B \cdot 2^n/n$.

Рассмотрим произвольный полный базис $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b\}$, в котором каждый функциональный элемент (ФЭ) ε_i , $\varepsilon_i \in B$, реализует некоторую функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, существенно зависящую от всех своих переменных, и имеет вес L_i , $L_i > 0$. Будем считать, что для некоторого натурального r , $r \geq 2$, заданы положительные действительные числа $c_1, \dots, c_{r-1}$.

Многовыходной рекурсивной схемой (или рекурсивной схемой) из функциональных элементов (РСФЭ) Σ глубины r в базисе B называется последовательность $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ схем из функциональных элементов, таких что Σ_1 — это СФЭ в базисе $\tilde{B}_1 = B$, а все остальные Σ_i , $i = 2, 3, \dots, r$, — СФЭ в расширенном базисе $\tilde{B}_i = B \cup \{\xi_{i-1}\}$, где ξ_{i-1} — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес c_{i-1} , $c_{i-1} > 0$, и реализующий ту же самую систему функций, которую реализует схема Σ_{i-1} последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$. Полученная РСФЭ Σ функционирует также, как функционирует послед-

ная схема последовательности Σ_r . Если каждая схема последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ (а значит, и каждый функциональный элемент $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$) имеет только один выход, будем называть соответствующую РСФЭ *скалярной*.

Взвешенная сложность $\mathcal{L}(\Sigma)$ (далее, просто сложность) РСФЭ Σ (как скалярной, так и многовыходной) определяется как сумма взвешенных сложностей СФЭ из определяющей её последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma_1) + \mathcal{L}(\Sigma_2) + \dots + \mathcal{L}(\Sigma_r).$$

Сложностью $\mathcal{L}_B^{PC(r)}(f)$ ($\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(f)$) функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ в классе РСФЭ (скалярных РСФЭ) глубины r в базисе B называется минимальная сложность РСФЭ (соответственно, скалярной РСФЭ), реализующей функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Естественным образом определяются функции Шеннона $\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n)$ и $\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n)$ как максимальные сложности соответствующего типа функций из $P_2(n)$, то есть функций алгебры логики, зависящих от n переменных:

$$\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{PC(r)}(f),$$

$$\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{CPC(r)}(f).$$

Задачей данной работы является получение асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины r в произвольном полном базисе B . В ней получены следующие результаты:

$$\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1}} \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{r} \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1}} \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Литература

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 829 с.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.