

ОПТИМИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРОДОЛЖЕНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МНОГОСЕТОЧНОМ МЕТОДЕ

*Даулбаев Талгат Кайратулы¹
Катруца Александр Михайлович²*

1: *Студент, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

2: *Аспирант, Московский физико-технический институт (государственный университет)*

E-mail: PVnuRT@gmail.com, aleksandr.katrutsa@phystech.edu

В работе рассматривается задача оптимизации операторов продолжения и проектирования в геометрическом многосеточном методе решения уравнений в частных производных с граничными условиями Дирихле.

Геометрический многосеточный метод [1] основан на построении иерархии вложенных сеток, использующихся для решения задачи. Основными его параметрами являются операторы межсеточного перехода: оператор продолжения для перехода на более точную сетку и оператор проекции для перехода на более грубую сетку.

От этих операторов зависит матрица итераций многосеточного метода, спектральный радиус которой определяет скорость сходимости алгоритма. А значит естественно минимизировать спектральный радиус как функцию от параметров метода. Однако эта задача является вычислительно сложной [2], поэтому предлагается использовать аппроксимацию спектрального радиуса с помощью формулы Гельфанда [3]. Это приближение в свою очередь имеет стохастическую несмещённую оценку, основанную на оценке следа матрицы итераций [4]. Аппроксимацию спектрального радиуса предлагается минимизировать по параметрам многосеточного метода с использованием стохастической оптимизации.

В этой формулировке одна итерация многосеточного метода эквивалентна проходу по свёрточной нейронной сети специального вида, а минимизация оценки спектрального радиуса эквивалентна обучению этой нейронной сети [5].

Для реализации метода были использованы библиотеки автоматического дифференцирования (Autograd, PyTorch). Для ускорения вычислений используются графические карты, программа для расчёта на которых написана с использованием технологии CUDA.

Предложенный метод оптимизации операторов проекции и интерполяции в двухсеточном методе был экспериментально проверен

для одномерных уравнений Пуассона, Гельмгольца (для низких и высоких частот, а также для случае непостоянного волнового числа) и сингулярно возмущённого уравнения диффузии-конвекции, а также для двумерного уравнения Пуассона. Во всех экспериментах предложенный метод находит операторы проекции и интерполяции, для которых спектральный радиус матрицы итераций меньше, чем в случае использования линейных операторов проекции и интерполяции. Несмотря на то что рассмотренные одномерные случаи не так интересны на практике, полученные результаты дают подтверждение работоспособности идеи оптимизации операторов проекции и интерполяции. Предложенный метод будет распространён на другие уравнения в 2D и 3D.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 14.756.31.0001) и РНФ (грант № 17-11-01376).

Литература

1. Briggs W. L., Henson V. E., McCormick S. F. A multigrid tutorial // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000
2. Nesterov Y., Protasov V. Y. Optimizing the spectral radius // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2013. V. 34. N. 3. P. 999-1013
3. Kozyakin V. On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula // Linear Algebra and its Applications, 2009, V. 431, N. 11, P. 2134-2141
4. Hutchinson M. F. A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for laplacian smoothing splines // Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1990, V. 19, N. 2, P. 433-450
5. Alexandr Katrutsa, Talgat Daulbaev, Ivan Oseledets. Deep Multigrid: learning prolongation and restriction matrices // arXiv preprint arXiv:1711.03825. – 2017.