Асимптотически оптимальные двусторонние вложения полных двоичных деревьев в прямоугольные решётки

Высоцкий Лев Игоревич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: vysotskylev@yandex.ru

В данной работе исследуется задача размещения полных двоичных деревьев в прямоугольной решётке, т. е. графе, вершинами которого являются точки плоскости (x, y), где x и y целые, заключённые в прямоугольник $[a, a + \ell] \times [b, b + h]$, а рёбра соединяют все пары точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$. Площадью решётки называется величина ℓh.

Вложением графа F в граф G называется пара отображений (φ, ψ):

$$\varphi \ : \ V(F) \to V(G), \quad \psi \ : \ E(F) \to C(G),$$

где $V(F)$ и $V(G)$ — множества вершин графов F и G соответственно, $E(F)$ — множество рёбер графа F, а $C(G)$ — множество простых цепей графа G. Эти отображения должны обладать тем свойством, что для любого ребра $e = (u, v) \in E(F)$ цепь $\psi(e)$ соединяет $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. Образы рёбер графа F называются *транзитными цепями*. Рассматриваются лишь те вложения, в которых транзитные цепи не пересекаются, образы листьев дерева расположены на нижней и верхней сторонах решётки, а образ корня — на левой или правой стороне. Более подробное описание см. в [1].

Рассмотрим «естественное» вложение полного двоичного дерева глубины n (далее D_n), при котором соединительные цепи проводятся максимально низко (см. [1]) Назовём вложение *стандартным*, если оно получено из построенного таким образом вложения применением нескольких операций горизонтального растяжения.

Основным путём вложения $\mathcal{M}$ назовём путь от корня к листу, при удалении которого получаются поддеревья (назовём их *основными*), каждое из которых имеет образы листьев лишь на одной стороне решётки. Можно показать, что у любого вложения такой путь можно выделить. Более того, для любого двустороннего вложения существует асимптотически равное по площади вложение, у которого вложения всех основных поддеревьев являются стандартными.

Для $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ определим $y(i)$ как максимальную ординату рёбер, пересекаемых вертикальной прямой $x = i + \frac{1}{2}$. Введём

также функцию $c_n(i)$ со следующим смыслом: это будет функция от i, вычислимая по прозрачному алгоритму и при этом представляющая собой (довольно точную для большинства i) оценку сверху на величину $y(i)$. Сначала определим функцию $\gamma_n(i) = \beta \in \{0,1\}^n$ следующим образом (здесь $(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0)$ есть двоичная запись числа i):

$$\beta_0 = \alpha_0,\ \beta_1 = \omega(\alpha_1, \beta_0), \ldots, \beta_{n-1} = \omega(\alpha_{n-1}, \beta_{n-2}),\ \text{где } \omega(x,y) = x \vee \bar{y}.$$

Определим $c_n(i)$ как количество нулей в $\gamma_n(i)$. Оказывается,, существует константа $D > 0$ такая, что $y(i) \leqslant c_n(i) + D \cdot \log_2(n)$.

Сформулируем алгоритм построения вложения. На вход он будет принимать пару n и h. Для $h < \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ построить вложение нельзя, при $h > n + 3$ можно в решётку длины 2^n и не меньше. Поэтому интересен промежуточный случай $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq h < n + 3$. Выберем натуральные числа n_1 и n_2 так, чтобы $n_1 + n_2 = n$ и $n_1 + \frac{n_2}{2} = h + 1$. Выделим в каждом из деревьев D_n 2^{n_1} поддеревьев глубины n_2 и будем пытаться вкладывать i_1-ую пару поддеревьев в решётку высоты $h - 2c_{n_1}(i_1)$ (при данном выборе n_1 и n_2 это всегда возможно). Для построения меньших вложений запустим наш алгоритм рекурсивно для каждой пары поддеревьев. Можно показать, что описанный алгоритм имеет сложность $O(n2^n)$ битовых операций. Обозначим $S_{\mathcal{A}}(n)$ площадь вложения, которое строит описанный алгоритм для дерева D_n. Тогда верна

Теорема 1. $S_{\mathcal{A}}(n) \lesssim \frac{n}{3} 2^n$.

Обозначим $S(n)$ минимальную площадь вложения дерева D_n. Тогда верна

Теорема 2. $S(n) \gtrsim \frac{n}{3} 2^n$.

Литература

1. Ложкин С. А., Ли Да Мин. О некоторых оптимальных вложениях двоичным и троичных деревьев в плоские прямоугольные решётки // Вестник Московского Университета, сер. 15, вычислительная математика и киберенетика, 1995.