

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Гончаров Василий Юрьевич

Старший преподаватель

Кафедра №813 МАИ (НИУ), Москва, Россия

E-mail: fulu.happy@gmail.com

Изучается поведение решений задач максимизации собственных значений эллиптических операторов при параметрических возмущениях. Интерес к рассмотрению этого вопроса объясняется необходимостью выработки общего подхода к решению задач проектирования конструкций наименьшего веса.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Далее, предположим, что $p, s \in \mathbb{N}$, причем $p < s$. Рассмотрим линейные пространства W и V , которые определяются из формул

$$V \leq H^s(\Omega), \quad W \leq H^p(\Omega), \quad V \subset W.$$

Здесь было использовано следующее соглашение: если H — пространство Гильберта, то запись $H_0 \leq H$ означает, что множество H_0 является замкнутым подпространством пространства H и оснащено тем же скалярным произведением. Будем считать, что свойства области Ω обуславливают компактность вложения пространства V в W . Пусть $U \subset L_r^\infty(\Omega)$ суть некоторое непустое открытое множество. Введем непустое метрическое пространство M , элементы которого в дальнейшем играют роль допустимых возмущений. Через $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать булеан множества X . Введем теперь отображения $\mathcal{U} : M \rightarrow \mathcal{P}(U)$, $\mathcal{V} : M \rightarrow \mathcal{P}(V)$, от которых будем требовать, чтобы для каждого $m \in M$ выполнялись следующие условия: (i) множество $\mathcal{U}[m]$ является непустым и слабо* компактным; (ii) $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{V}[m] \leq V$.

Для заданной пары $(u, m) \in U \times M$ рассмотрим билинейные формы $\mathcal{A}_{u,m} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{u,m} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{u,m}(y, z) &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq s} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x, u(x), m) \partial^\alpha y(x) \partial^\beta z(x) dx, \\ \mathcal{B}_{u,m}(y, z) &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \int_{\Omega} b_{\alpha\beta}(x, u(x), m) \partial^\alpha y(x) \partial^\beta z(x) dx, \end{aligned}$$

где для каждого $m \in M$ функции $a_{\alpha\beta}(\cdot, \cdot, m)$, $b_{\alpha\beta}(\cdot, \cdot, m)$ удовлетворяют требованиям работ [1, 2], причем функции $a_{\alpha\beta}(x, \xi, \cdot)$, $b_{\alpha\beta}(x, \xi, \cdot)$ являются непрерывными.

Для $(u, m) \in U \times M$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения: найти пару $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{V}[m] \setminus \{\vartheta\})$ такую, что

$$\mathcal{A}_{u,m}(y, z) = \lambda \mathcal{B}_{u,m}(y, z), \quad z \in \mathcal{V}[m]. \quad (\text{EVP})$$

Здесь ϑ обозначает нейтральный элемент пространства V . Известно, что k -ое собственное значение задачи (EVP) определяется следующим вариационным принципом:

$$\lambda_k[u, m] = \min_{\substack{Y \leq \mathcal{V}[m] \\ \dim Y = k}} \max_{y \in Y \setminus \{\vartheta\}} \Lambda(u, y, m), \quad \Lambda(u, y, m) \triangleq \frac{\mathcal{A}_{u,m}(y, y)}{\mathcal{B}_{u,m}(y, y)}.$$

Решение ряда прикладных проблем приводит к необходимости максимизации собственного значения $\lambda_k[u, m]$ на множестве $\mathcal{U}[m]$: найти элемент $\hat{u}_k \in \mathcal{U}[m]$ такой, что

$$\lambda_k[\hat{u}_k, m] = \mu_k(m) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}[m]} \lambda_k[u, m]. \quad (\text{MAX}_k)$$

Как мы видим, допустимые возмущения оказывают влияние на множество допустимых управлений, пространство состояний, а также отношение Рэлея.

В докладе планируется (i) рассмотреть условия, при которых функция оптимального значения $\mu_k(\cdot)$ является (полу)непрерывной, (ii) изучить предел Куратовского последовательности множеств оптимальных решений задачи (MAX_k) , соответствующей последовательности значений параметров, и, наконец, (iii) рассмотреть приложения полученных результатов к задачам проектирования конструкций наименьшего веса, а также привести другие их применения.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00425 а.

Литература

1. Goncharov V. Yu. Existence Criteria in Some Extremum Problems Involving Eigenvalues of Elliptic Operators // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. Vol. 9, no. 1. P. 37–47.
2. Гончаров В. Ю. Задачи максимизации собственных значений линейных эллиптических операторов // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1349–1372.