

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ, В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

**Караев Александр Дмитриевич, Караева Дария
Александровна**

Магистрант, магистрант

ИНБИКСТ МФТИ, Москва, Россия

E-mail: sashakaraev@gmail.com, darkaraeva@gmail.com

Рассматривается задача о распространении длинных волн над неровным дном, содержащим мелкие хаотические осцилляции помимо плавной компоненты. В отсутствие завихрений, в линеаризованном приближении уравнений мелкой воды данная задача описывается волновым уравнением на возвышение свободной поверхности (см. [1])

$$\eta_{tt} - (c^2(x)\eta_x)_x = 0, \quad (1)$$

в котором $c^2(x) = gD(x)$, g — ускорение свободного падения, $D(x)$ — глубина океана в точке x . В качестве начальных условий в соответствии с поршневой моделью генерации волн [1] выбраны

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \eta_t|_{t=0} = 0,$$

где η_0 — некоторая финитная функция.

Решение поставленной задачи может быть получено с помощью численных методов, однако вышеупомянутый характер изменения дна сопряжен со значительными вычислительными и временными трудностями. Более эффективный метод решения основывается на использовании теории осреднения (см. [2]), согласно которой решение исходной задачи близко к решению осредненной, получающейся из задачи (1) заменой $c^2(x)$ усредненным значением вида

$$\overline{c^2(x)} = g\overline{D}(x) = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{-4\xi^2} (3 - 8\xi^2) D(x - r\xi) d\xi,$$

Кроме того, известно асимптотическое решение осредненной задачи (см. [3]), которое является наиболее эффективным и имеет вид

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{D}(x_0)}{\overline{D}(x)} \right)^{1/4} \left[\eta_0 \left(\sqrt{g\overline{D}(x_0)} (\tau(x) - t) \right) + \eta_0 \left(\sqrt{g\overline{D}(x_0)} (\tau(x) + t) \right) \right],$$

где

$$\tau(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{g\bar{D}(x)}}.$$

Целью данной работы является сравнение численного решения исходной и осредненной задачи, а также асимптотического решения осредненной задачи на примере некоторых участков мирового океана в одномерном случае, когда задача (1) рассматривается вдоль некоторого отрезка дуги большого круга.

Авторы выражают признательность В. Е. Назайкинскому за постановку задачи, терпение и ценные советы.

Работа поддержана грантом РФФИ №17-01-00644а.

Иллюстрации

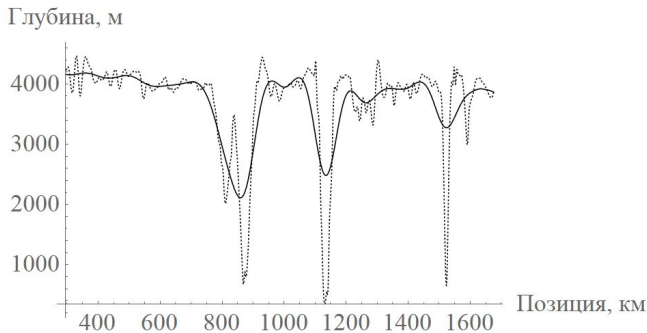


Рис. 1. График исходной и усредненной глубины для региона вблизи побережья Чили. Пунктирной линии соответствует исходная глубина, сплошной – усредненная.

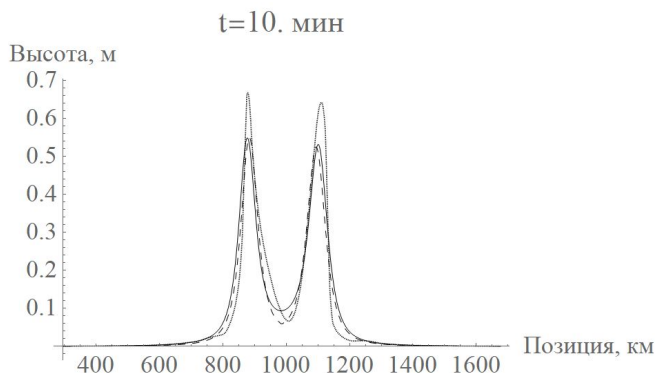


Рис. 2. Пример решения в момент времени $t = 10$ минут для региона вблизи побережья Чили. Сплошной линии соответствует численное решение, крупному пунктиру – асимптотическое осредненной задачи; мелкому пунктиру – численное решение исходной задачи.

Литература

1. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.
2. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б. О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами. Докл. РАН. 2015. Т. 461, № 5. С.516–520.
3. Dobrokhotoy S. Yu, Sinitsyn S. O., Tirozzi B. Asymptotics of localized solutions of the one-dimensional wave equation with variable velocity: I. The Cauchy problem. Russ. J. Math. Phys. 2007. V. 14, № 1. P.28–56.