Уточнение структуры неравенств Эссеена и Розовского

Габдуллин Руслан Айдарович,
Макаренко Владимир Александрович

Студент, студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ruslixag@gmail.com, vlamakarenko@gmail.com

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (с.в.), с.в. X_k имеет функцию распределения (ф.р.) $F_k(x)$, $\mathsf{E}X_k = 0, \mathsf{E}X_k^2 = \sigma_k^2 < \infty$. Обозначим $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2, S_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$, пусть $\overline{F}_n(x)$ — ф.р. с.в. S_n, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$. Положим

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \overline{F}_n(x) - \Phi(x) \right|, \quad \mu_k(z) = \mathsf{E}X_k^3 \mathbf{1}\left(|X_k| < z\right),$$
$$\sigma_k^2(z) = \mathsf{E}X_k^2 \mathbf{1}\left(|X_k| \geqslant z\right), \quad \varrho_k(z) = |\mu_k(z)| + z\sigma_k^2(z) \quad z > 0.$$

Для всех $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ определим величины

$$L_{E,n}^3 = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \sup_{z>0} \varrho_k(z), \quad \widehat{L}_{E,n}^3 = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \sup_{0<z\leqslant B_n} \varrho_k(z),$$
$$L_{E,n}^3(\varepsilon, \gamma) = B_n^{-3} \sup_{0<z\leqslant \varepsilon B_n} \left\{ \gamma \left| \sum_{k=1}^n \mu_k(z) \right| + z \sum_{k=1}^n \sigma_k^2(z) \right\},$$
$$L_{R,n}^3(\varepsilon, \gamma) = B_n^{-3} \left[\gamma \left| \sum_{k=1}^n \mu_k(\varepsilon B_n) \right| + \sum_{k=1}^n \sup_{0<z\leqslant \varepsilon B_n} \left\{ z\sigma_k^2(z) \right\} \right].$$

В работе 1968 года [1] Эссееном были доказаны неравенства

$$\Delta_n \leqslant C_1 \cdot L_{E,n}^3, \tag{1}$$
$$\Delta_n \leqslant C_2 \cdot \widehat{L}_{E,n}^3. \tag{2}$$

Значения абсолютных констант C_1, C_2 посчитаны не были, однако использованный метод доказательства позволял получить лишь оценку константы $C_1 \leqslant 373$.

В 1974 году аналогичный результат был получен Розовским [2]:

$$\Delta_n \leqslant C_3 \cdot L_{R,n}^3(1,1). \tag{3}$$

Значение абсолютной константы C_3 в работе не было посчитано.

Розовский отметил, что его результат является обобщением первого неравенства Эссеена (1) (однако лишь в том смысле, что правая часть неравенства Розовского конечна всегда, в то время как правая часть неравенства Эссеена может быть равна бесконечности), но даже не упомянул про неравенство Эссеена (2).

В работе [3] были доказаны неравенства уточненной структуры

$$\Delta_n \leqslant C_E(\varepsilon,\gamma)\cdot L^3_{E,n}(\varepsilon,\gamma), \quad \varepsilon\in(0;\infty], \tag{4}$$

$$\Delta_n \leqslant C_R(\varepsilon,\gamma)\cdot L^3_{R,n}(\varepsilon,\gamma), \quad \varepsilon\in(0;\infty), \tag{5}$$

для случая $\gamma = 1$. Эти неравенства обобщают результаты Эссеена и Розовского. Кроме того, были получены оценки абсолютных констант $C_1 \leqslant C_E(\infty,1) \leqslant 2.75$, $C_2 \leqslant C_E(1,1) \leqslant 2.81$, $C_3 \leqslant C_R(1,1) \leqslant 2.81$.

В данной работе неравенства (4) и (5) доказаны для произвольных ε,γ, а также:

- Построен метод вычисления верхних оценок абсолютных констант $C_E(\varepsilon,\gamma)$ и $C_R(\varepsilon,\gamma)$, в частности:

  $C_1 \leqslant C_E(\infty,1) \leqslant 2.66$, $C_2 \leqslant C_E(1,1) \leqslant 2.73$, $C_3 \leqslant C_R(1,1) \leqslant 2.73$.

- Исследованы свойства монотонности полученных в рамках данного метода оценок $C_E(\varepsilon,\gamma)$ и $C_R(\varepsilon,\gamma)$.

- Проведено сравнение величин $L^3_{E,n}(\varepsilon,\gamma)$, $L^3_{R,n}(\varepsilon,\gamma)$ и указано место новых неравенств среди классических результатов данной области.

Работа поддержана Грантом МД-2116.2017.1.

Литература

1. Esseen C. G. On the reminder term in the central limit theorem. // Arkiv for Matematik. Band 8, nr 2, 1968. p.7-15.
2. Розовский Л. В. О скорости в теореме Линдеберга-Феллера. // Вестник Ленинградского Университета, 1974, № 1. стр. 70-75.
3. Габдуллин Р. А., Аналитические методы для оптимизации естественных оценок скорости сходимости в теореме Линдеберга-Феллера // Выпускная квалификационная работа, ВМК МГУ, 2017.
4. Шевцова И. Г., Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. Москва, АРГАМАК-МЕДИА, 2016.