

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОБЩЕННОГО СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

Даньшина Мария Александровна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: danschina.maria@yandex.ru

Теория графов - область математики, которая нашла множество применений в различных прикладных задачах. Актуальным является направление, в рамках которого граф рассматривается с вероятностной точки зрения. Случайные графы - это удобный инструмент моделирования больших сетевых структур, к которым относятся, например, виртуальные сети пользователей Интернет, транспортные и информационно-телекоммуникационные сети.

Впервые модель случайного графа была предложена П. Эрдешем и А. Реньи на рубеже 50-х 60-х годов двадцатого века в работе [2] и независимо от них Е. Гильбертом в работе [3]. Рассматривается граф с n вершинами, в котором нет кратных ребер и петель. Две вершины i и j соединяются ребром с некоторой вероятностью $p : 0 < p < 1$ и независимо от всех остальных пар вершин. Таким образом реализуется классическая схема Бернулли с "вероятностью успеха" p . Естественным обобщением модели является предположение, что вероятность соединения двух вершин ребром основывается на их весах. Таким образом, чем выше вес вершины, тем вероятнее сцепление с наибольшим числом других вершин.

Т. Бриттон в работе [1] определил модель обобщенного случайного графа. Пусть $\{1, 2, \dots, n\}$ - набор вершин, а $W_i > 0$ - вес i вершины, $1 \leq i \leq n$. Вероятность наличия ребра между i и j определяется выражением:

$$p_{ij} = \frac{W_i W_j}{L_n + W_i W_j},$$

где $L_n = \sum_{i=1}^n W_i$. При этом W_i может быть как постоянной, так и случайной величиной. Если положить $W_i \equiv n\lambda/(n - \lambda)$ для некоторого $0 \leq \lambda < n$, легко показать, что $p_{ij} = \lambda/n$ для $\forall 0 \leq i \leq j \leq n$. Таким образом модель Эрдеша-Реньи - это частный случай обобщенного случайного графа.

Основной целью работы являлось изучение асимптотических свойств различных характеристик в случайном обобщенном графе.

Рассмотрим обобщенный случайный граф с n вершинами. Пусть существует совокупность $X = \{X_{ij}\}_{i < j} : P(X_{ij} = 1) = P(X_{ji} = 1)$. Событие $X_{ij} = 1$ означает, что существует ребро между i и j вершинами. $X_{ij} = X_{ji}$, для $i < j$ и $X_{ii} = 0$ для любого i .

Пусть $I = \{\alpha\} : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i = 1, 2, \dots, n$. и все α_i различны. Введем случайную величину Y_α :

$$Y_\alpha = X_{\alpha_1 \alpha_2} * X_{\alpha_2 \alpha_3} * X_{\alpha_1 \alpha_3}.$$

Таким образом $Y_\alpha = 1$, если через вершины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ проходит цикл длины 3. Тогда $S = \sum_{\alpha \in I} Y_\alpha$ — это число треугольников в графе. Обозначим $\lambda \equiv \sum_{\alpha \in I} p_\alpha$, где

$$p_\alpha = P(Y_\alpha = 1) = \frac{W_{\alpha_1}^2 W_{\alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^2}{(L_n + W_{\alpha_1} W_{\alpha_2})(L_n + W_{\alpha_2} W_{\alpha_3})(L_n + W_{\alpha_1} W_{\alpha_3})}.$$

Справедлива следующая теорема о распределении числа треугольников в обобщенном случайном графе:

Теорема 1. Если $\exists \varepsilon > 0 : E(W_i^{4+\varepsilon}) < \infty$ для $\forall i = 1, 2, \dots, n$, то предельное распределение числа треугольников S в обобщенном случайном графе является смешанным пуассоновским со случайным параметром λ .

Литература

1. Britton, T., Deijfen, M., and Martin-Lof, A. 2006. Generating simple random graphs with prescribed degree distribution. J. Stat. Phys., 124(6), 1377-1397.
2. Erdos, P., and Renyi, A. 1959. On random graphs. I. Publ. Math. Debrecen, 6, 290-297.
3. E.N. Gilbert, 1959. Random graphs, Annals of Mathematical Statistics, 30, 1141-1144.