

ПОИСК НУЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА В КОНИЧЕСКОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ.

Ястребов Кирилл Сергеевич

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ivanov@cmc.msu.ru

Доклад посвящен проблеме устойчивости метода поиска нулей функционала, вполне подчиненного сходящемуся ряду, в коническом метрическом пространстве. Подробнее о конусах и связанных с ними понятиях см. [1].

Пусть $P \subset E$ - телесный строго миниздральный конус в линейном нормированном пространстве E , и $X \neq \emptyset$. Коническая метрика - это отображение $d : X \times X \rightarrow P$, удовлетворяющее обычным аксиомам метрики. Пара (X, d) называется коническим метрическим пространством. В пространстве E задан конический порядок $\preceq$ по правилу: $a \preceq b \Leftrightarrow b - a \in P$, $a \ll b \Leftrightarrow b - a \in \text{Int}(P)$. Пусть в конусе P задан сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B, \text{ где } \theta \ll b_{k+1} \ll b_k, b_k \in P \text{ для любых } k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Для $\forall x \in X$ индексом x относительно ряда $(*)$ и функционала φ назовем $I_{\varphi}(x) = \{0, \varphi(x) \not\preceq b_1\} \vee \{k, b_{k+1} \not\preceq \varphi(x) \ll b_k\} \vee \{\infty, \varphi(x) = \theta\}$. По аналогии с [2], скажем, что функционал φ вполне подчинен ряду $(*)$, если $\forall x \in X, \exists x' \in X$, что $d(x, x') \ll \varphi(x)$, $I_{\varphi}(x') > I(x)$. Понятия секвенциальной непрерывности, а также полунепрерывности сверху отображений, секвенциальной компактности множеств см., например, в [3].

График $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ называется $\{\theta\}$ -полным, если любая фундаментальная последовательность его элементов

$$\{x_n, \gamma_n\}_{n=1,2,\dots}, \gamma_n \in \varphi(x_n), \gamma_n \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty,$$

сходится к некоторому элементу (ξ, θ) , где $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$.

График $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ называется $\{\theta\}$ -замкнутым, если для каждого его предельного элемента вида (ξ, θ) верно, что $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$.

Теорема 1. Пусть функционал $\varphi(x) : X \rightarrow P$ вполне подчинен ряду $(*)$, секвенциально непрерывен, и либо график $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{\theta\}$ -полным, либо пространство (X, d) полно

и график $\text{Graph}(\varphi)$ является $\{\theta\}$ -замкнутым. Кроме того, в пространстве X либо $\text{Nil}(\varphi)$, либо любой замкнутый шар (или и то, и другое) секвенциально компактны.

Тогда отображение $\hat{\gamma}_\varphi$, $\hat{\gamma}_\varphi(x) := \{y \in \text{Nil}(\varphi) | d(x, y) \preceq \sum_{j=0}^{\infty} b_{I_\varphi(x)+j}\}$, секвенциально полунепрерывно сверху, то есть для любого $x_0 \in X$, для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow x_0$, и для любых $\xi_n \in \hat{\gamma}_\varphi(x_n)$ верно, что $d(\xi_m, \hat{\gamma}_\varphi(x_0)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \theta$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Т.Н. Фоменко за ценные замечания, помощь и направление в научной работе.

Литература

1. Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, учебное пособие: // Калининский Государственный Университет, Калинин, 1977.
2. Гайнуллова С. Р., Фоменко Т. Н. Функционалы, подчиненные сходящимся рядам, и некоторые приложения // "Математические Заметки", 2014, 96(2), 314-317.
3. Фоменко Т. Н. Устойчивость каскадного поиска. // Известия РАН, Серия Математическая, с. 171-190, Том 74, 5, 2010 г.