Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Нижние оценки мощности кубических схем, реализующих частичные булевы операторы

Научный руководитель – Гасанов Эльяр Эльдарович

Ефимов Алексей Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: efimovqwerty@yandex.ru

Кубическим элементом в пространстве будем называть булев оператор, который имеет в сумме не более шести входов и выходов. Будем изображать его в виде единичного куба в пространстве, а каждой грани куба будем сопоставлять соответствующий вход или выход оператора. По аналогии с плоскими схемами [1, 2] определим кубические схемы, сопоставляя им соответствующие булевы операторы и изображая их в пространстве в форме поликубов [3].

Также введём на множестве кубических схем понятие среднего потенциала, равного количеству выходов элементов, выдающих единицу на заданном входном наборе схемы, усреднённого по всем входным наборам.

Определение: Пусть $f : D \leftarrow \{0,1\}^m$ – частичный булев оператор. Тогда $U(f) := \min\limits_{K:F_K=f} U_D(K)$. Обозначим $P_2(D,m)$ –множество частичных булевых операторов $f : D \leftarrow \{0,1\}^m$ с m выходами, определенных на множестве D. Также обозначим $P_2(n,m) := P_2(\{0,1\}^n, m)$ – множество всюду определенных булевых операторов с n входами и m выходами.

Введём функцию Шеннона для булевых операторов.

$$U(D,m) := \max_{f \in P_2(D,m)} U(f), \quad U(n,m) := \max_{f \in P_2(n,m)} U(f).$$

Деревом выходов схемы K назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы K, причем расстояние между элементами - расстояние между их центрами в манхэттенской метрике. Рассмотрим такое множество схем $U_{T[0,h]}(f)$, что порядок длины дерева выходов не превосходит некоторой величины константы h (то есть выходы схемы расположены близко). В таком случае, имеет место нижняя оценка потенциала.

Теорема: Если $D \subseteq \{0,1\}^n, d = |D|$, то существует такая константа C, не зависящая h, такая, что неравенство

$$U_{T[0,h]}(f) \geq \begin{cases} C\frac{m\sqrt[3]{md}}{n}, \text{если } \sqrt[3]{md} > h \\ C\frac{m\sqrt{md}}{n\sqrt{h}}, \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h \end{cases} \tag{1}$$

выполнено для почти всех $f \in P_2(D,m)$ при $n \to \infty, n\log_2 n = o(d), m = 2^{o(d)}$.

Источники и литература

1) Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы. МГУ, мехмат.

2) Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих частичные булевы функции. МГУ, журнал Дискретная математика, том 26, выпуск 1, страницы 49-74, (2014).

3) Ronnie Barequet, Gill Barequet, Gunter Rote. Formulae and Growth Rates of High-Dimensional Polycubes. Journal Article Electronic Notes in Discrete Mathematics 34(459), (2009).