

Изучение геометрии диаграмм Юнга аффинных перестановок Z_m

Научный руководитель – Бибиков Павел Витальевич

Иванова Екатерина Павловна

Абитуриент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: Ekaterina.sc1106@gmail.com

Изучение геометрии диаграмм Юнга аффинных перестановок Z_m \mathbb{Z}_m \mathbb{Z}_m

Иванова Е.П.

ГБОУ лицей «Вторая школа», Москва, Россия

Ekaterina.sc1106@gmail.com

Целью данной работы является исследование диаграмм Юнга перестановок, задаваемых

$X \rightarrow \lambda X + b \pmod{m}$, в кольце Z_m при обратимом множителе λ .

В работе проведен анализ зависимости циклической структуры от элементов λ , b , приведены критерии наличия и оценка количества аффинных перестановок (1), входящих в цикл длины n , кратной n , и, на основании этих данных, алгоритм вычисления циклической структуры аффинной перестановки, а также оценка количества различных диаграмм Юнга для фиксированных значений λ и m .

На первом шаге была доказана

Теорема 1

Перестановка (1) имеет элементы, переходящие за n шагов сами в себя тогда и только тогда, когда

$b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k$ делит $\text{НОД}(\lambda^n - 1, m)$

При этом количество таких элементов равно

$$C_n = \text{НОД}(\lambda^n - 1, m)$$

На основании теоремы 1 найдена рекуррентная формула для вычисления длин циклов, задаваемых перестановкой (1).

Теорема 2

Число циклов длины n равно

$$K_n = (C_n - \sum_{i|n, i < n} K_i) / n$$

Теорема 3

Для фиксированных элементов λ и m и элементов b_1 и b_2 диаграммы Юнга перестановок типа (1) совпадают тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(\lambda-1, b_1, m) = \text{НОД}(\lambda-1, b_2, m)$$

Следствие

Для фиксированных элементов λ и m существует ровно

$$\tau(\text{НОД}(\lambda-1; m)),$$

различных диаграмм Юнга перестановок, задаваемых преобразованием (1), где $\tau(x)$ - количество натуральных делителей x (функция Лежандра).

Теорема 4

Для фиксированных элементов λ , m и b длины циклов диаграмм Юнга перестановок аффинной перестановки кратны

$$\text{НОД}(\lambda-1; m) / \text{НОД}(\lambda-1; b; m)$$

Автор благодарит П.В. Бибикова за постановку задачи и неоценимую поддержку во время ее решения.