

## Изучение геометрии диаграмм Юнга аффинных перестановок $Z_m$

Научный руководитель – Бибиков Павел Витальевич

*Иванова Екатерина Павловна*

*Абитуриент*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

*E-mail: Ekaterina.sc1106@gmail.com*

Изучение геометрии диаграмм Юнга аффинных перестановок  $Z_m$   $\mathbb{Z}_m$   $\mathbb{Z}_m$

Иванова Е.П.

*ГБОУ лицей «Вторая школа», Москва, Россия*

*Ekaterina.sc1106@gmail.com*

Целью данной работы является исследование диаграмм Юнга перестановок, задаваемых

$X \rightarrow \lambda X + b \pmod{m}$ , в кольце  $Z_m$  при обратимом множителе  $\lambda$ .

В работе проведен анализ зависимости циклической структуры от элементов  $\lambda$ ,  $b$ , приведены критерии наличия и оценка количества аффинных перестановок (1), входящих в цикл длины  $n$ , кратной  $n$ , и, на основании этих данных, алгоритм вычисления циклической структуры аффинной перестановки, а также оценка количества различных диаграмм Юнга для фиксированных значений  $\lambda$  и  $m$ .

На первом шаге была доказана

### Теорема 1

Перестановка (1) имеет элементы, переходящие за  $n$  шагов сами в себя тогда и только тогда, когда

$b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k$  делит  $\text{НОД}(\lambda^n - 1, m)$

При этом количество таких элементов равно

$$C_n = \text{НОД}(\lambda^n - 1, m)$$

На основании теоремы 1 найдена рекуррентная формула для вычисления длин циклов, задаваемых перестановкой (1).

## Теорема 2

Число циклов длины  $n$  равно

$$K_n = (C_n - \sum_{i|n, i < n} K_i) / n$$

## Теорема 3

Для фиксированных элементов  $\lambda$  и  $m$  и элементов  $b_1$  и  $b_2$  диаграммы Юнга перестановок типа (1) совпадают тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(\lambda-1, b_1, m) = \text{НОД}(\lambda-1, b_2, m)$$

## Следствие

Для фиксированных элементов  $\lambda$  и  $m$  существует ровно

$$\tau(\text{НОД}(\lambda-1; m)),$$

различных диаграмм Юнга перестановок, задаваемых преобразованием (1), где  $\tau(\mathbf{x})$  - количество натуральных делителей  $\mathbf{x}$  (функция Лежандра).

## Теорема 4

Для фиксированных элементов  $\lambda$ ,  $m$  и  $b$  длины циклов диаграмм Юнга перестановок аффинной перестановки кратны

$$\text{НОД}(\lambda-1; m) / \text{НОД}(\lambda-1; b; m)$$

*Автор благодарит П.В. Бибикова за постановку задачи и неоценимую поддержку во время ее решения.*