

# Исследование линейного фильтра в задаче скорейшего обнаружения разладки случайного процесса

Научный руководитель – Артемов Алексей Валерьевич

**Ибрагимов Булат Ленарович**

Студент (бакалавр)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: [ibrbulat@yandex.ru](mailto:ibrbulat@yandex.ru)

В основе работы лежит известная в литературе задача скорейшего обнаружения разладки [2, 3, 4], которая состоит в детектировании момента времени, в который произошло резкое изменение статистических свойств наблюдаемого процесса. Рассматривается  $\xi$  – процесс броуновского движения с появляющимся в момент  $\theta$  сносом:

$$\xi_t = \mu(t - \theta)^+ + \sigma W_t, \quad (1)$$

где  $W_t$  – винеровский процесс, а  $(t - \theta)^+ = \max(t - \theta, 0)$ . Первое слагаемое можно интерпретировать как интеграл от ненаблюдаемого процесса  $\theta$ :

$$\theta_t = \mu \mathbb{I}(t > \theta) \quad (2)$$

с  $\theta \sim \text{Exp}(\lambda)$  (с функцией распределения  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ )

$$\xi_t = \int_0^t \theta_t dt + \sigma W_t \quad (3)$$

Далее будем рассматривать две связанные задачи:

- 1) Задачу оптимального линейного оценивания величины  $\theta_t$  по значению  $\xi_t$  и,
- 2) Задачу об оптимальной остановке, т.е. задачу оптимального оценивания момента  $\theta$  по наблюдениям  $\xi_t$   $t \geq 0$ .

Для построения оптимальной линейной оценки  $\lambda_t$  значения  $\theta_t$ , достаточно ([1], с. 602) рассмотреть задачу оптимальной фильтрации для процесса  $\tilde{\theta}_t$  по значениям  $\tilde{\xi}_t$ , где

$$\tilde{\xi}_t = \int_0^t \tilde{\theta}_t dt + \sigma W_t, \quad (4)$$

где  $W_t$  – некоторый винеровский процесс, а  $\tilde{\theta}_t$  – гауссовский процесс, не зависящий от  $W_t$ , и имеющий те же первые два момента, что и процесс  $\theta_t$ .

Оказывается, что построенный двумерный процесс  $(\tilde{\theta}_t, \tilde{\xi}_t)$  удовлетворяет условиям применимости метода Калмана-Бьюси ([1] 15.3), откуда следует, что оптимальная линейная оценка  $\lambda_t$  и среднеквадратичная ошибка фильтрации удовлетворяют уравнениям:

$$d\lambda_t = \lambda(\mu - \lambda_t)dt + \frac{\gamma_t}{\sigma^2} (d\tilde{\xi}_t - \lambda_t dt), \quad \lambda_0 = 0 \quad (5)$$

$$\gamma_t = -\lambda\sigma^2 - \frac{\lambda\sigma^2}{2}z \frac{I_1(2z) + I_3(2z)}{I_2(2z)}, \quad z = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\lambda}}\sqrt{e^{-\lambda t}} \quad (6)$$

Сформулируем задачу об оптимальной остановке в байесовской постановке (также известной как Вариант А [3]). Момент остановки  $\tau^* \in \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{M}$  – класс конечных моментов остановки, будем называть оптимальным в байесовской постановке, если

$$\mathbf{P}(\tau^* < \theta) + c\mathbf{E}(\tau^* - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}} [\mathbf{P}(\tau < \theta) + c\mathbf{E}(\tau - \theta)^+] . \quad (7)$$

Для оптимальной линейной оценки  $m_t$  в качестве момента остановки будем рассматривать аналогичный нелинейному случаю момент

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : m_t \geq c\} \quad (8)$$

### Источники и литература

- 1) Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.
- 2) Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: МЦНМО, 2014.
- 3) Ширяев А. Н. Стохастические задачи о разладке. М.: МЦНМО, 2017.
- 4) Ширяев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. Теория вероятностей и ее применения, 1963.