Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Некоторые оптимизационные задачи, включающие проверку сложных гипотез

Научный руководитель – Гущин Александр Александрович

Лещенко Сергей Сергеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: sslsystemup@yandex.ru

Мы рассматриваем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором предполагаются заданными два подмножества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ положительного конуса L^1_+ неотрицательных интегрируемых случайных величин. Предполагается, что множество $\mathcal{G}$ выпукло и задан выпуклый функционал $\gamma\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, выполняющий роль штрафной функции. Пусть Φ — множество всех рандомизированных тестов, т.е. измеримых функций $\varphi\colon \Omega \to [0,1]$. Для элементов g и h множеств $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ соответственно и $\varphi \in \Phi$ введём следующие обозначения:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$G_i(g,\varphi)$	$\mathbf{E}[g\varphi]+\gamma(g)$	$\mathbf{E}[g(\varphi-1)]+\gamma(g)$	$\mathbf{E}[g\varphi]+\gamma(g)$	$\mathbf{E}[g(\varphi-1)]+\gamma(g)$
$H_i(h,\varphi)$	$\mathbf{E}[h\varphi]$	$\mathbf{E}[h\varphi]$	$\mathbf{E}[h(\varphi-1)]$	$\mathbf{E}[h(\varphi-1)]$

Таблица: Определение G_i, H_i

Мы рассматриваем четыре оптимизационные задачи, постановка которых заключается в следующем:

$$\text{максимизировать} \inf_{g\in\mathcal{G}} G_i(g,\varphi)$$

$$\text{по всем } \varphi \in \Phi_i\colon = \left\{\varphi \in \Phi \mid \sup_{h\in\mathcal{H}} H_i(h,\varphi) \leqslant \alpha_i\right\}, \quad i = 1,2,3,4,$$

где $\alpha_i \geqslant 0$ для $i = 1,2$ и $\alpha_i \geqslant -\inf\limits_{h\in\mathcal{H}} \mathbf{E}[h]$ для $i = 3,4$ соответственно.

Когда все элементы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ имеют математическое ожидание 1, они могут интерпретироваться как плотности вероятностных мер. В этом случае все четыре задачи совпадают и по существу являются задачей проверки сложной нулевой гипотезы $\mathcal{H}$ против сложной альтернативы $\mathcal{G}$ в минимаксной постановке, см. [1]. В общем случае задачи 1—4 различны и имеют не только математический интерес, но и приложения к задачам частичного хеджирования.

Для каждой из четырех задач мы доказываем существование оптимального теста, т.е., что максимум достигается. В каждой из четырех задач мы формулируем соответствующую двойственную задачу и доказываем отсутствие разрыва двойственности, а при некоторых дополнительных условиях, зависящих от номера задачи, существование решения двойственной задачи и характеризацию решения исходной задачи через решение двойственной задачи.

Источники и литература

1) Gushchin, A. (2015). A Characterization of maximin tests for two composite hypotheses, Mathematical Methods of Statistics Vol. 24 No. 2, 110—121.