

Об устойчивости с вероятностью 1 стохастических дифференциальных уравнений относительно многомерного винеровского процесса

Научный руководитель – Насыров Фарит Сагитович

Асылгареев Артур Салаватович

Аспирант

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

E-mail: asylgarееvartur@gmail.com

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (далее — СДУ) с интегралом Стратоновича относительно многомерного винеровского процесса $\bar{W}_t^{(n)} = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})$, определённого на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$:

$$d\xi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^{(n)}(t, \xi^{(n)}(t)) * dW_t^{(j)} + b^{(n)}(t, \xi^{(n)}(t)) dt, \quad \xi^{(n)}(0) = x_0, \quad (1)$$

где $\sigma_j^{(n)}(t, 0) = b^{(n)}(t, 0) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Цель данной работы, продолжающей исследование [1], заключается в выводе условий устойчивости с вероятностью 1 для возмущённых решений СДУ (1). Изложенный подход основан на том, что решение уравнения (1) можно представить в виде детерминированной функции от случайного аргумента, которая, в свою очередь, является решением цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений со случайной правой частью (см [2]).

Определение 1. Возмущённое решение $\xi^{(n)}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $\xi^{(n)}(0) = x_0$ устойчиво с вероятностью 1 относительно тривиального решения, если при п.в. ω для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, \omega) > 0$ такое, что для всякого x_0 , для которого $|x_0| < \delta$, решение $\xi^{(n)}(t)$ удовлетворяет неравенству $|\xi^{(n)}(t)| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.

Следует отметить, что для СДУ, как правило, рассматривается устойчивость в более слабых смыслах: по вероятности, p -устойчивость, экспоненциальная устойчивость.

Теорема 1. Решение уравнения

$$d\zeta_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n t \cdot \zeta_t^{(n)} * dW_t^{(j)} - a(t)\zeta_t^{(n)} dt, \quad t \geq 0, \quad \zeta_t^{(n)}|_{t=0} = \zeta_0^{(n)}, \quad (2)$$

является устойчивым с вероятностью 1 при $a(t) = nt^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где $\alpha > 0$.

Следствие 1. Пусть для всех $t \geq 0$ с вероятностью 1 выполнено неравенство $|\xi^{(n)}(t)| \leq K\zeta_t^{(n)}$, где $K = \text{const} > 0$. Тогда возмущённое решение $\xi^{(n)}(t)$ СДУ (1) устойчиво с вероятностью 1.

Доказательство следствия 1 основано на применении теорем сравнения для оценки возмущённых решений СДУ (1), (2).

Источники и литература

- 1) А. С. Асылгареев, Ф. С. Насыров, *О теоремах сравнения и устойчивости с вероятностью 1 одномерных стохастических дифференциальных уравнений*, // Сибирский математический журнал. Т.57, вып 5. 2016. С. 969–977
- 2) Ф. С. Насыров, *Об интегрировании систем стохастических дифференциальных уравнений*, // Математические труды. Т.19, вып 2. 2016. С. 158–168