Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Предельная теорема для надкритического симметрического ветвящегося случайного блуждания с конечным числом источников

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Христолюбов Иван Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: I-4100043@yandex.ru

Рассматривается непрерывное по времени ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Предполагается, что лежащее в основе процесса случайное блуждание является симметричным, однородным по пространству и неприводимым с генератором A, детали см., напр., в [3, 2]. Размножение и гибель частиц могут происходить в конечном числе выделенных точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ решетки, называемых *источниками ветвления*, и описываются инфинитезимальными производящими функциями потомков $f(u, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_i)u^n$, $0 \leq u \leq 1$, см. [3]. Предполагается, что $\beta_i^r := f^{(r)}(1, x_i) < \infty$ при всех $r \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, N$. Величина $\beta_i := f'(1, x_i)$, называется *интенсивностью* источника x_i. Предполагается, что $\beta_i > 0$ $\forall i$. Введенный в [3] эволюционный оператор $H_{\beta_1,\ldots,\beta_N} = A + \sum_{i=1}^{N} \beta_i \Delta_{x_i}$ описывает поведение средних численностей частиц как на всей решетке, так и в каждой точке решетки. Будем называть ВСБ *надкритическим*, если в спектре оператора $H_{\beta_1,\ldots,\beta_N}$ содержится хотя бы одно положительное собственное значение. Показано, что в спектре этого оператора присутствуют не более чем N положительных собственных значений с учетом кратности. Также показано, что старшее собственное значение этого оператора в надкритическом случае имеет кратность 1.

В данной работе основным является следующий результат для надкритического ВСБ: для численностей частиц $\mu(y)$ в каждой точке решетки $y \in \mathbb{Z}^d$ и $\mu_t := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu(y)$ в смысле сходимости моментов имеем

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t(y)\, e^{-\lambda t} = \xi\psi(y), \quad \lim_{t \to \infty} \mu_t\, e^{-\lambda t} = \xi,$$

где $\psi(y)$ — некоторая детерминированная функция, а $\xi(y)$ и ξ — невырожденные случайные величины. При дополнительном предположении $\beta_i^r = \mathrm{O}\big(r!\, r^{r-1}\big)$ $\forall i = 1, \ldots, N$ полученный результат справедлив также в смысле сходимости по распределению. Данный результат является обобщением теоремы, полученной в [2] для ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков и одним источником ветвления, в котором могло происходить деление не более чем на двух потомков, и результата, представленного без доказательства в [1], полученного для ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков и одним источником ветвления.

Список литературы

[1] Богачев Л. В., Яровая Е. Б. Успехи математических наук. 1998, 53:5(335), P. 229–230.

[2] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, М., 2007.

[3] Yarovaya E. B. Теория вероятностей и ее применения 2017, 63:3, С. 218–241. 19:4, P. 1151-1167.