Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Асимптотический анализ в задаче об оценке стоимости опциона в модели со случайной волатильностью.

Научный руководитель – Шамаев Алексей Станиславович

Земцова Екатерина Геннадьевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: zemtsovaeg@gmail.com

Предлагается рассмотреть европейский опцион со случайной волатильностью, имеющую определенный вид. Цель работы заключается в том, чтобы оценить стоимость опциона в такой модели.
Предположим, что цена любого актива, соответствующая процессу S_t, удовлетворяет СДУ:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t,$$

где μ - тренд, σ_t - процесс волатильности, W_t - Винеровский процесс. Возьмем $\sigma_t = f(Y_t)$, где $f(Y_t) = f(y)$ - функция от процесса Орнштейна-Улинбека. Процесс Y_t удовлетворяет СДУ:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dZ_t,$$

где α, β - положительные константы (предполагаем), m - среднее процесса, корреляция между двумя Винеровскими процессами W и Z:

$$Z_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}B_t,$$

где $\rho \in$[-1;1] корреляционный параметр для зависимых процессов Z и W, а B и W - независимые процессы.
Закон распределения процесса Y выглядит так:

$$Y_t \sim N(m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t}, \frac{\beta^2}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})).$$

Можно утверждать, что при $t \to \infty$ $Y_t \sim N(m, \frac{\beta^2}{\alpha})$.
Обозначим цену опциона в момент t за $P := P(S_t, \sigma(Y_t), t) = P(S_t, Y_t, t)$. Для того, чтобы вывести выражение, определяющее цену опциона P, необходимо применить двумерную формулу Ито к функции P, используя принцип безарбитражности рынка. Однако, в рассматриваемой модели ценообразовании опциона учавствуют базовый актив с ценой S и два источника случайности dW и dB, что означает неполноту рынка, поэтому возникает необходимость введения дополнительных предположений о составлении портфеля особым образом, что позволит утверждать что ценовая функция P удовлетворяет следующему УРЧП [2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \rho\beta\sigma S \frac{\partial^2 P}{\partial S \partial Y} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + r(S\frac{\partial P}{\partial S} - P) + \\ +(\alpha(m - Y) - \beta\widetilde{\Lambda}(S, Y, t))\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 0 \le t \le T \\ S > 0, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

с граничными условиями $P(S,Y,T) = h(S)$, где $\widetilde{\Lambda}(S,Y,t) = \rho\dfrac{\mu - r}{\sigma} + \lambda^* \sqrt{1-\rho^2}$.
Чтобы разрешить уравнение (1), вводятся предположения:
1. Корреляционный параметр между процессами Z и W $\rho = 0$.
2.

$$\sigma(Y_t) = C + \varepsilon\phi(Y_t),$$

где C - известная постоянная, ε - известное малое число и ϕ - финитная функция от процесса Орнштейна-Улинбека.
3. Разложение ценовой функции P в приближении второго члена по ε:

$$P(S_t, Y_t, t) = P_0(S_t, t) + \varepsilon P_1(S_t, Y_t, t).$$

Учитывая эти предпјложения при подстановки в (1), выпишем приближения цены опциона по ε. Получим, что при приближении ε^0 уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{1}{2}C^2 S^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial S^2} + r(S\frac{\partial P_0}{\partial S} - P_0) = 0,$$

а это дифференциальное уравнение Блэка - Шоулза;
при ε:

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}C^2 S^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial Y^2} + r(S\frac{\partial P_1}{\partial S} - P_1) + (\alpha(m-Y) - \beta\widetilde{\Lambda})\frac{\partial P_1}{\partial Y} = \\ = -C\phi S^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial S^2} \end{gathered} \tag{2}$$

Чтобы разрешить уравнение (2), потребуется ввести логарифмическую замену цены базового актива, применить предположения, изложенные в статье [2], и использовать принцип Дюамеля. Тогда получим результат:

$$P_1(t;x,y) = \int_0^t \int_{x'} \int_{y'} W(t;t',x,y,x',y') \cdot f(t',x',y') dt' dx' dy',$$

где $f(t',x',y') = -C \cdot \varphi \cdot S^2 \cdot \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial S^2}$, C = const, $\varphi = \varphi(y)$, $P_0 = P_0(S,t)$, x=lnS,

$$W := u(t;t',x,y,x',y') = exp\{x^T G(t)x + q^T(t)x + k(t)\} \cdot N(t) \cdot \cdot exp\langle P^{-1}(t)(x - n(t;z)), (x - n(t;z))\rangle\},$$

где матрицы G(t), P(t), вектора q(t), n(t;z) и числа k(t), N(t) известны (найдены из решения вспомогательных ОДУ из предположения [1]).

Источники и литература

1) [1] Чечкин А.Г Явный вид фундаментального параболического дифференциального оператора второго порядка, Пробл. мат. анализа. 2015. В. 81. С. 179-188.
   [2] Achdou Y., Pironneau O. Computational methods for option pricing, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). 2005. P.316