

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Разрешимость системы со свободными членами, где

$$a(t) > 0, \quad b(t) > 0, \quad c(t) > 0, \quad g(t) > 0, \quad t \in [0, T]$$

Научный руководитель – Алексеенко Сергей Николаевич

Донцова Марина Владимировна

Кандидат наук

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a(t)u(t, x) + b(t)v(t, x))\partial_x u(t, x) = f_1(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c(t)u(t, x) + g(t)v(t, x))\partial_x v(t, x) = f_2(t, x), \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t, x)$, $v(t, x)$ – неизвестные функции, f_1 , f_2 , $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t)$ – известные функции, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $g(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x). \quad (2)$$

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (1) с начальными условиями (2) в области Ω_T . С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1], [2], [3], [4]:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_1 + b(\tau)w_3)d\tau)d\nu, \quad (3)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_4 + g(\tau)w_2)d\tau)d\nu, \quad (4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu), \quad (5)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu). \quad (6)$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t , дважды дифференцируемых по переменной x , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T , $\bar{C}^2(R)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на R , $C^2([0, T])$ – пространство функций, определенных, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка на отрезке $[0, T]$.

Справедлива теорема [2]:

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1(t, x), f_2(t, x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $a(t), b(t), c(t), g(t) \in C^2([0, T])$ и выполняются условия: 1) $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $g(t) > 0$, $t \in [0, T]$,
2) $\varphi'_1(x) \geq 0$, $\varphi'_2(x) \geq 0$ на R , 3) $\partial_x f_1 \geq 0$, $\partial_x f_2 \geq 0$ на Ω_T . Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3) - (6).

Источники и литература

- 1) Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. №4. С. 71–82.
- 2) Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19. № 4. С. 23–32.
- 3) Донцова М. В. Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 21–36.
- 4) Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379. №1. С. 16–21.