Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Регуляризованный след оператора Штурма-Лиувилля с логарифмическим потенциалом.

Научный руководитель – Ишкин Хабир Кабирович

Валиуллина Ляйсан Габдулловна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: l.matem2012@yandex.ru

Собственные числа регулярного обыкновенного дифференциального оператора (ДО) являются корнями целой функции Δ – «характеристического определителя» этого оператора. В случае регулярных краевых условий функция Δ принадлежит классу K, введенному в работе [2]. Для функции Δ класса K удается вычислить регуляризованные следы [2]: $s_l := \sum_{k=1}^{\infty} \left(z_k^l - B_l(k)\right)$, $l \in \mathbb{N}$, где $\{z_k\}$ – пронумерованные определенным образом корни Δ, $B_l(n)$ – несколько первых членов асимптотического ряда по степени k и $\ln k$ для z_k^l, обеспечивающих сходимость ряда.

Асимптотика собственных чисел сингулярных ДО имеет сложную структуру, потому регуляризованные следы удается получить лишь для конкретных классов. Так, в работе [1] найдена сумма s_1 для ДО L_n, порожденного $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением $l(y) := (-1)^n y^{(2n)} + qy$ и краевыми условиями $y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$, где $q = x^\alpha + V$, $\alpha > 0$, $V \in C_0^{(1)}[0,+\infty)$. Метод этой работы существенно основан на том, что резольвента оператора L_n принадлежит классу Неймана–Шаттена σ_p при некотором $p > 0$. В случае медленного (например, логарифмического) роста q метод не работает. В предлагаемой работе найден регуляризованный след оператора L_1 при $q(x) = \ln(x+a)$, $a = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные числа оператора L_1, пронумерованные в порядке возрастания. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - B(k)) = \frac{1}{4}\left(\ln\left(2a\sqrt{\pi}\right) + \gamma\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \tag{1}$$

$$- \frac{a}{\pi}\int_1^{\infty} \{x\} \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)' dx - \frac{a}{2\pi}\left(1 + \ln\frac{2\sqrt{\pi}}{a}\right)\int_1^{\infty} \{x\}\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\right)' dx,$$

где γ – постоянная Эйлера, $\{x\}$ – дробная часть x, $B(k) = \ln k + b_0 + b_1\frac{\sqrt{\ln k}}{k} + \frac{b_2}{k} + \frac{b_3}{k\sqrt{\ln k}}$, b_i – явно вычисляемые константы.

Источники и литература

1) Ишкин Х. К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 480–490.

2) Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функ. анализ и его прил. 1967. Т. 1, № 2. С. 52–59.