Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Представление решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Лобода Артём Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: orion1312@yandex.ru

[12pt]article [cp1251]inputenc [T2A]fontenc [english,russian]babel
amssymb,amsmath,latexsym
amsfonts,amscd,amsmath

Представление решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом

А. А. Лобода

Рассматривается задача Коши:

$$d\Psi_\omega(t)(\cdot) = a(\Psi_\omega(t))''(\cdot) + bV(t,\cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot) + cR(\cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot)dB_\omega(t),$$
$$\Psi_\omega(0)(\cdot) = \varphi_0(q).$$

Её решение может быть записано следующим образом (рандомизированная формула Фейнмана-Каца):

$$\Psi_\omega(t)(q) = \int_{C(0,t)} \exp\left\{ b\int_0^t V(\tau, q+\xi(\tau))d\tau + c\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q+\xi(t))w^\alpha_{0,t}(d\xi).$$

Входящие в уравнение функции предполагаются допускающими аналитическое продолжение в подходящую область. Для таких функций рассматривается следующий функциональный интеграл, полученный путем аналитического продолжения интеграла из формулы Фейнмана-Каца:

$$\Psi(t,q_1) = \int \exp\left\{ \int_0^t iV(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2 d\tau \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ \int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB(\tau) \right\} \varphi_0(q + \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))wf^{-1}(d\xi_1).$$

Можно показать, что этот функциональный интеграл удовлетворяет стохастическому уравнению Шрёдингера:

$$d\Psi_{\cdot}(t)(q) = i\frac{d^2\Psi_{\cdot}(t)(q)}{dq^2} - iV(q)\Psi_{\cdot}(t)(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\Psi(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_{\cdot}(t)(q)dB(t), \Psi(0,\cdot) = \varphi_0. \quad (1)$$

Отметим, что для детерминированного случая такой метод был описан в работе [1]. При аналитическом продолжении по параметру получается функциональный интеграл по обобщённой мере Фейнмана (см. [2]). При описанном выше подходе используется функциональный интеграл по мере Винера.