Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Об аналитической сложности дифференциально-алгебраических функций

Научный руководитель – Белошапка Валерий Константинович

Степанова Мария Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: step_masha@mail.ru

Аналитическая сложность - это характеристика, дающая один из возможных способов количественного описания "сложности" зависимости аналитической функции от ее аргументов. Для функции двух переменных она определяется с помощью последовательности вложенных классов Cl_n (см. [1]): Cl_0 - это аналитические функции одного переменного (x или y), Cl_1 - функции вида $c(a(x)+b(y))$, где $a(x), b(x), c(x)-$ аналитические, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x,y)+B_n(x,y))$, где C - функция одного переменного, а A_n и B_n - функции из Cl_n. Число n считается сложностью функции, если функция принадлежит $Cl_n \backslash Cl_{n-1}$; если функция не попала ни в один из классов Cl_n, то ее сложность равна бесконечности. Функция фиксированной конечной сложности является дифференциально-алгебраической ([2]), и поэтому одна из причин возникновения бесконечной сложности функции - это несуществование дифференциально-алгебраического соотношения, которому она бы удовлетворяла (пример функции, не удовлетворяющей никакому дифференциально-алгебраическому соотношению, содержится в [3]). В связи с этим возникает вопрос: единственна ли эта причина? Иными словами, как соотносятся все дифференциально-алгебраические функции $DAlg$ и все функции конечной сложности Cl_{fin}? Ясно, что имеет место включение $Cl_{fin} \subset DAlg$, но является ли это включение строгим? Главная цель - построение примеров дифференциально-алгебраических функций бесконечной сложности, следствие существования которых - включение $Cl_{fin} \subsetneq DAlg$. Эти примеры - решения линейных уравнений с частными производными некоторого специального вида (среди них есть и уравнение теплопроводности). Для уравнений такого вида (и даже для более широкого класса уравнений) доказывается конечномерность семейства решений фиксированной конечной сложности, что позволяет явно выписать пример в виде ряда.

Источники и литература

1) V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243 — 249.
2) V. K. Beloshapka, Analytical Complexity: Development of the Topic, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 19, No. 4, 2012, pp. 428–439., 2012.
3) A. Ostrowski, Ueber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z. v.8, p.p. 241 — 298, (1920).