

Спектр возмущенного двумерного гармонического осциллятора в полосе

Научный руководитель – Фазуллин Зиганур Юсупович

Нугаева Ирина Гамировна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: nuga-irina@yandex.ru

Рассмотрим оператор $L = L_0 + V$ с областью определения

$$D = \{u(x, y) \in L^2(\Pi), \quad u(x, 0) = u(x, \pi) = 0\},$$

где $\Pi = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq \pi\}$, $L_0 u = -\Delta u + x^2 u$ задачи Дирихле и $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в пространстве $L^2(\Pi)$, V – оператор умножения на ограниченную измеримую финитную, вещественную функцию. Пусть $P_i^{(2)}$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного гармонического осциллятора, соответствующее собственным значениям $2i + 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то есть $P_i^{(2)} \varphi = (\varphi, \varphi_i) \varphi_i$, где $\varphi_i(x) = (2^i i! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_i(x)$. А $P_l^{(1)}$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного оператора Лапласа задачи Дирихле, соответствующие собственным значениям l^2 , $l = 1, 2, \dots$, то есть $P_l^{(1)} f = (f, f_l) f_l$, где $f_l(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ly$, $y \in [0, \pi]$. См [1],[2]. Тогда для собственных значений λ_{mk} оператора L_0 и соответствующих им проекторов P_{mk} справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Собственные значения оператора L_0 $\lambda_n = \lambda_{mk} = n$, $n = 2, 4, 5, 6, \dots$, а их кратность $\nu_n = \begin{cases} [\frac{\sqrt{n}}{2}], & \text{если } \lambda_n \in \left((2[\frac{\sqrt{n}}{2}])^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 1)^2 \right) \\ [\frac{\sqrt{n}}{2}] + \frac{(-1)^{n+1}}{2}, & \text{если } \lambda_n \in \left((2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 1)^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 2)^2 \right) \end{cases}$

причем $P_n = P_{mk} = \sum_{s=1}^{\nu_n} P_s^{(1)} \otimes P_{(\frac{n}{2}-\frac{s^2+1}{2})}^{(2)}$.

Пусть $\mu_s^{(n)}$ – собственные числа оператора L , соответствующие собственному числу $\lambda_n = n$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$ спектра оператора L_0 . Тогда справедлива

Теорема 2. Пусть $V(x, y) \in C^4(\Pi)$, тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}}^n \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_s^{(k)}) + sp P_k V \right] = \frac{1}{12\pi} \int_{\Pi} V^2(x) dx$$

Источники и литература

- 1) Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 5. С. 87–124
- 2) Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981