Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Сведение функционального интеграла по разрывным траекториям к интегралам по непрерывным траекториям

Научный руководитель – Шавгулидзе Евгений Тенгизович

Колпаков Егор Сергеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия
E-mail: kolpak317bel@gmail.com

В работе [1] показано существование функционального интеграла заданного равенством с интегралом по мере Винера по пространству $C[0,1]$.

$$\frac{\int\limits_{C[0,1]} f(\varphi) exp[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\dot{\varphi}(t))^2dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\varphi^4(t)dt-\frac{1}{3}[\varphi^3(1)-\varphi^3(0)]+\int\limits_0^1\varphi(t)dt]d\varphi}{\int\limits_{C[0,1]} exp[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\dot{\varphi}(t))^2dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\varphi^4(t)dt-\frac{1}{3}[\varphi^3(1)-\varphi^3(0)]+\int\limits_0^1\varphi(t)dt]d\varphi} =$$

$$= \frac{\int\limits_Y f(\xi_\varphi) exp[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\dot{\xi}(t))^2dt]d\xi}{\int\limits_Y exp[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\dot{\xi}(t))^2dt]d\xi}$$

Где $Y \subset C[0,1]$ и $Y \neq C[0,1]$

Равенство интегралов даётся преобразованием $\xi(t) = \varphi(t) + \int\limits_0^t \varphi^2(\tau)d\tau$ пространства $C[0,1]$ в пространство Y, определённым почти всюду (по мере).

В данной работе задаётся равенство функциональных интегралов

$$\frac{\int\limits_E f(x) e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int\limits_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)+\int\limits_0^1\varphi(t)dt} dx}{\int\limits_E e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int\limits_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)+\int\limits_0^1\varphi(t)dt} dx} =$$

$$= \int_{C_0^\alpha[0,1]} f(x_y)W(dy)$$

Где $E \supset C[0,1]$ и $E \neq C[0,1]$, и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ и предложено отображение $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ пространства E разрывных траекторий в $C_0^\alpha[0,1]$, причём оно непрерывно, измеримо и определено поточечно, а не по мере. Что позволило определить меру на E, связанную с функциональным интегралом.

Полученна мера позволяет сводить интегралы по разрывным траекториям к интегралам по непрерывным траекториям по мере Винера.

Теорема 1: Если функция $x(t)$ имеет n точек разрыва $t_1^*, ..., t_n^*$ на отрезке $[0,1]$ и $x(0) = 0$ и функция $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$ гёльдерова на $[0,1]$ с коэффициентом α, то $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{t-t_i^*} + \varphi(t)$$

где φ гёльдерова с коэффициентом α,
и $\varphi(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i^*}$
и $\varphi(t_k^*) = -\sum\limits_{i \neq k} \frac{1}{t_k^* - t_i^*}$ при $1 \leq k \leq n$

Обозначим через X_n пространство функций $x(t)$, имеющих n точек разрыва на отрезке $[0,1]$, и таких, что $x(0) = 0$ и функция $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$ гёльдерова на $[0,1]$ с коэффициентом α. Теорема 1 даёт описание пространства X_n. Вложим X_n в декартово произведение пространств $[0,1] \times ... \times [0,1] \times C^\alpha[0,1]$ (n раз произведение отрезков $[0,1]$ на пространство гёльдеровых функций $C^\alpha[0,1]$). На этом произведении имеется естественная метрика произведения. Она задаёт метрику на X_n.

Теорема 2: Отображение из X_n в $C_0^\alpha[0,1]$ задаваемое $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$ непрерывно.

Теорема 3: Отображение из $E = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$ в $C_0^\alpha[0,1]$ заданное формулой $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$ измеримо.

Теорема 4: Отображение из $C_0^\alpha[0,1]$ в E, обратное к отображению из теоремы 3 измеримо.

Источники и литература

1) V.V. Belokurov, E.T. Shavgulidze Paths with singularities in functional integrals of quantum field theory, https://arxiv.org/abs/1112.3899v2
2) Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах, Мир, 1979
3) Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы, Изд-во МГУ 1990