

Секция «Преподавание русского языка и фундаментальных дисциплин иностранным учащимся»

Сумма расходящегося ряда и смысл знака равенства в математике

Научный руководитель – Безаева Наталья Сергеевна

Тан Линь

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: tanglindewindows@hotmail.com

Знак равенства « $=$ » в математике, и во всех других научных дисциплинах, и в жизни очень распространен: например, $2 + 8 = 10$ или $7 * 9 = 63$ и т. д. Даже значение функции $y = f(x)$ при фиксированном значении аргумента x мы можем получить однозначным образом, используя знак равенства.

Но при использовании знака равенства для описания предельных процессов в математике он имеет другое значение. Действительно, значение знака равенства может показаться немного иным, когда число N бесконечно, его обратная величина $1/N$ равна 0 . После некоторого размышления мы по-прежнему принимаем этот результат. Хотя значение знака равенства здесь сильно отличается от значения $2 + 8 = 10$ или значения функции в некоторой точке.

Мы можем определить в первом случае знак равенства как «статический», потому что обе части выражения $2 + 8 = 10$ находятся в отношении эквивалентности, и значения этого типа могут быть полностью заменены друг на друга и применяться ко всем другим значениям этой категории равенств. Во втором случае мы должны знать достаточно об определении предела. По определению мы можем видеть, что здесь 0 является только динамическим пределом в случае бесконечного увеличения числа N , а значение $1/N$ будет меньше любого наперед заданного положительного числа. Поэтому здесь мы можем называть этот знак равенства «динамическим». Мы не можем сказать, что существует такое N , что его обратное значение равно нулю, поскольку бесконечность не является числом в обычном смысле. Поэтому значение знака равенства внутри предельной операции существенно отличается от значения «статического» знака равенства. Тем не менее, мы можем использовать «динамический» знак для проведения вычислений, таких как вычисление производной функции в точке.

Тем не менее, мы часто рассматриваем оба знака без различия. Мы столкнемся с трудностями только в очень небольшом числе случаев, таких как расходящиеся ряды, где мы не можем определить предел. В то же время мы не замечаем разницы в использовании «статического» и «динамического» знаков, потому что почти в каждом приложении мы можем получить логический и правильный результат.

Значение знака равенства для бесконечного ряда совершенно иное. Согласно определению сходимости Коши, существует неотъемлемое единство между бесконечным рядом и пределом ряда, так как сумма бесконечного ряда по критерию Коши является пределом частичного суммы

Sn. Однако, в этом определении есть некоторые упущенные особенности. Во-первых, если рассматриваемый ряд (1) является абсолютно сходящимся, мы можем преобразовать порядок суммирования без изменения сходимости и значения предела последовательности. Но если ряд не является абсолютно сходящимся, то мы не можем прийти к такому выводу, поскольку преобразование порядка суммирования по своему усмотрению может привести к катастрофическим последствиям. Например, для знакопеременных рядов мы можем

получить любое значение частичной суммы, просто изменив порядок суммирования, и мы можем даже изменить его сходимость, изменив порядок суммирования!

Отсюда легко находим, что значения знака равенства при абсолютной сходимости и условной сходимости окажутся несколько различными. Для абсолютной сходимости все еще есть алгоритмы сложения. В случае условной сходимости мы в некоторой степени утратили алгоритмы суммирования.

Тем не менее, для расходящихся рядов есть много приложений. Развитие исследований знакопередающих рядов прошло очень извилистый путь. Во-первых, Коши решительно выступал против применения расходящихся рядов, считая это бессмысленным. Разумеется, исследование расходящихся рядов невозможно в смысле Коши, но после работы Эйлера, Абеля, Циперо и других, некоторые расходящиеся ряды были более четко определены. Мы больше не можем называть их «Сумма ряда» или определить значение, соответствующее бесконечной серии. В конце концов, это просто другое определение бесконечного ряда, в соответствии с которым, ряд все еще может сходиться к определенному значению при условии Коши и, в то же время, расходящиеся ряды в смысле определения других математиков дают некоторые соответствующие значения. Так что эти новые определения ряда могут стать продолжением сходимости ряда в смысле Коши.

Например, для некоторых рядов мы не можем получить сходимость в обычном смысле Коши, но мы можем получить значение $1/2$ по методам Абеля или Циперо. Здесь мы находим некоторые очень необычные вещи. Очевидно, что частичная сумма колеблется между 0 и 1 , и в новом смысле получает предел $1/2$, что прекрасно, так как многие из предыдущих математиков, таких как Эйлер, также получили этот результат. Объяснение состоит в том, что для $1/(1-x)$ разложения степенных рядов, взяв $x = -1$, мы все равно получим результат (хотя он уже превысил область сходимости), в связи с чем некоторые математики даже предложили метафизические объяснения. Если мы сможем принять это, то следующие ряды, расходящиеся в бесконечной серии мы ни в коем случае не можем принять в обычном смысле.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n + \dots = -1; \quad (1)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + N + \dots = -1/12; \quad (2)$$

Здесь мы рассмотрим второй ряд (2), где Эйлер для получения этого результата, использовал аналитическое расширение функции Римана. Современный математик Теренс Тао также дал более подробное объяснение этому [1].

В общем, все в математике тесно связано с определением используемых символов, таким как знак равенства, который может иметь разные значения в разных местах.

Можно чрезвычайно запутаться, например, при суммировании расходящихся рядов здесь, мы склонны чувствовать себя все более и более непонимающими получаемые результаты, но если мы тщательно подумаем о конкретных использованиях определения в разных ситуациях, мы обнаружим, что значение каждого знака равенства совершенно иное.

В конце концов, я думаю, что мы можем думать о них как о соотношении отображений, каждое из которых равно элементам слева, не обязательно одним и тем же правилам отображения, сопоставленным с реальным или пустым множеством. Это позволяет понять основную причину путаницы. Определение знака равенства в разных ситуациях приведет к различным правилам сопоставления.

Однако можно утверждать, что такой подход может дать много бессмысленных определений, но, по мнению первопроходцев-математиков, многие исследования выдали множество похожих или идентичных результатов, даже при исследовании расходящихся рядов, таких как (2). И здесь, я считаю, есть более глубокая логика, или философские постулаты,

которые будут сформулированы в будущем.