Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Пороговые дизъюнктивные коды

Щукин Владислав Юрьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: vpike@mail.ru

Рассмотрим множество из t элементов, среди которых присутствуют *дефектные* элементы. Классическая задача группового тестирования – выявить все дефектные элементы в предположении, что их количество $\leq s$, $s \ll t$, используя при этом минимальное количество вопросов (групповых тестов). *Вопросом* является произвольное подмножество элементов G, а *ответом* – 1, если G содержит хотя бы один дефектный элемент, и 0 иначе. В построении систем технической диагностики [1] возникает другая задача – определить, не превысило ли количество дефектных элементов в исходном множестве заданную константу s. Причем решение должно быть принято за минимальное время, поэтому мы рассматриваем только *неадаптивную* схему групповых тестов, т.е. когда все тесты сформированы заранее и могут выполнятся одновременно, а принятие решения о количестве дефектных элементов основывается лишь на сравнении количества положительных ответов с заданным порогом T.

Представим N неадаптивных групповых тестов в виде двоичной матрицы $X = (x_i(j))$ с N строками и t столбцами, где $x_i(j) = 1$ тогда и только тогда, когда j-й элемент включен i-ю тестовую группу. Такую двоичную матрицу будем называть кодом длины N и объема t, а количество единиц в двоичном столбце – весом столбца. Следующее определение задает достаточное условие на матрицу X для проведения группового тестирования описанного выше.

Определение 1. Код X длины N и объема t называется *пороговым дизъюнктивным s^T-кодом*, если дизъюнктивная сумма любых $\leq s$ столбцов из X имеет вес $\leq T$, а дизъюнктивная сумма любых $\geq s+1$ столбцов из X имеет вес $\geq T+1$.

Обозначим через $t(N, s, T)$ максимальный объем пороговых дизъюнктивных s^T-кодов длины N. Введем параметр $\tau = T/N$, $0 < \tau < 1$, и определим *оптимальную скорость* пороговых дизъюнктивных кодов:

$$\underline{R}_{\mathrm{Thr}}(s) = \max_{0<\tau<1} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\log_2 t(N, s, \lfloor \tau N \rfloor)}{N}.$$

С помощью метода случайного кодирования на ансамбле равновесных двоичных кодов мы получили следующую нижнюю границу на оптимальную скорость.

Теорема 1. *При $s \to \infty$ выполнено неравенство:*

$$\underline{R}_{\mathrm{Thr}}(s) \geq \frac{\log_2 e}{4s^3}(1 + o(1)), \quad s \to \infty.$$

Отметим, что скорость аналогичных *дизъюнктивных s-кодов* [2], применяемых в классической задаче группового тестирования, при $s \to \infty$ имеет существенно большую асимптотику – $O(\ln s/s^2)$.

Источники и литература

1) Зубашич В.Ф., Лысянский А.В., Малютов М.Б. Блочно рандомизированный метод построения распределительных систем технической диагностики // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. 1976. Т. 6.

2) Дьячков А.Г., Воробьев И.В., Полянский Н.А., Щукин В.Ю. Границы скорости дизъюнктивных кодов // Проблемы передачи информации. 2014. Т. 50. No 1. С. 27-56.