Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О нулях дзета — функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой

Там До Дык

Аспирант

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

E-mail: doductam140189@gmail.com

Работа посвящена проблеме распределения нетривиальных нулей дзета — функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой $\Re s = 0,5$. Некоторые проблемы теории чисел тесно связаны с нулями специальных функций, к которым относятся дзета-функция Римана $\zeta(s)$, L — функции Дирихле $L(s,\chi)$ и др. Самой известной из этих функций является дзета — функция Римана. На полуплоскости $\Re s > 1$ она задаётся рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s},$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость кроме точки $s = 1$.

Известна гипотеза Римана, которая утверждает, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. В 1942 г. А. Сельберг [4] получил правильную по порядку оценку числа нулей $\zeta(s)$, лежащих на отрезках критической прямой вида $[T, T+H], H = T^{0,5+\varepsilon}$, где ε — произвольная малая постоянная. В 1984 г. А. А. Карацуба [1] усилил результат Сельберга, а именно для отрезка критической прямой меньшей длины $[T, T+H], H = T^{27/82+\varepsilon}$. Проблема уменьшения длины выше указанного отрезка представляет собой трудность. Тем не менее, если рассматривать эту задачу "в срденем то она решена А. А. Карацубой [2]. Он доказал, что почти все отрезки прямой $\Re s = 1/2$ вида $[T, T+X^{\varepsilon}]$, где $X \le T \le 2X$, содержат более $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon}\ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. В 1988 г. Кисилёва Л. В. [3] получила результат подобного рода, но для отрезка $(X, X+X^{11/12+\varepsilon})$. В настоящей работе автор уменьшил длину отрезка осреднения, а именно отрезок вида $(X, X+X^{7/8+\varepsilon})$. Доказали следующую теорему:

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^{\varepsilon}$, $X_1 \ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$.

Через E обозначим множество тех T из промежутка $[X, X+X_1]$, для которых интервал $[T, T+H]$ содержит меньше, чем $c_0 H \ln T$ число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, где $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε. Тогда для меры этого множества $\mu(E)$ справедлива оценка $\mu(E) \le X_1 X^{-0,5\varepsilon}$.

Источники и литература

1) Карацуба А. А. О нулях функции zeta(s) на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 3. С. 569–584.

2) Карацуба А. А. Распределение нулей функции zeta(0,5+it) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 1214–1224.

3) Киселева Л. В. О количестве нулей функции zeta(s) на “почти всех” коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 479–500.

4) Selberg A. On the zeros of Riemann’s zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. pp. 1-59.