Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

**Об алгебраической независимости некоторых чисел над кольцом g-адических чисел**

***Самсонов Алексей Сергеевич***

*Выпускник (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

*E-mail: dontsmoke@inbox.ru*

[12pt]article [T2A]fontenc [cp1251]inputenc [russian]babel [intlimits]amsmath amssymb ord theoremТеорема lemmaЛемма dfОпределение utvУтверждение zamЗамечание

# Об алгебраической независимости некоторых чисел над кольцом $g$-адических чисел

А. С. Самсонов

Вопросы трансцендентности и алгебраической независимости для $p$-адических чисел существенно отличается от проблем трансцендентности и алгебраической независимости для комплексных чисел.

Результаты в данной области появлялись время от времени и имели довольно случайный характер. В 1935-ом году Курт Малер [5] сформулировал и доказал $p$-адический аналог теоремы Гельфонда. В 1966-ом Адамс [6] опубликовал статью, содержащую некоторый обзор вопроса. Один из первых критериев трансцендентности был получен в 1975-ом году [4], с 74.

В данной статье затрагивается вопрос обобщения некоторых результатов из работ В.Г. Чирского и П. Бундшу [7], [8], [9], [10] на случай $g$-адических чисел.

Введем следующие обозначения:

1) $p$ — простое число, $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел;
2) $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых $g$-адических чисел;
3) $|x|_p = p^{-_p x}$ — $p$-адическая норма, если $x = 0$, считаем, что $_p x = \infty$;
4) $\mathbb{Q}_p$ — поле $p$-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по $p$-адической норме;
5) $|x|_g$ — $g$-адическая псевдонорма, $\mathbb{Q}_g$ — кольцо $g$-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по $g$-адической псевдонорме;
6) $\Omega_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

Согласно [3], с 96, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $p$ — простое число,*

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,i} p^{r_{k,i}}, \text{ где } a_{k,i} \in \mathbb{Z}_p,\ i = 1, \dots, m,\ k = 0, 1, 2 \dots.$$

*Пусть*

*1) для любого $i = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{k,i}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;*

*2) для любого $i = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров $n$ таких, что число $r_{n+1,i}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{0,i}, \dots, r_{n,i}$ и чисел $r_{l,j}$ при любых $l$ и при $j \neq i$, $j = 1, \dots, m$;*

*3) для любого $i = 1, \dots, m$ и для любого $k$ имеем $_p a_{k,i} = 0$.*

*Тогда числа $\alpha_i$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы $\Omega_p$.*

Рассмотрим вопрос обобщения данного результата на случай $g$-адических чисел. Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел.

Для кольца $\mathbb{Q}_g$ возможно построить расширение $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. При этом можно продолжить псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$ на кольцо $\Omega_g$. Обозначим $\varphi: \ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$ — изоморфизм, тогда $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_n)$ для некоторых $a, b_1, \ldots, b_n$.

**Теорема 2.** *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение $n$ различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,i} g^{r_{k,i}}, \text{ где } a_{k,i} \in \mathbb{Z}_g, \ i = 1, \ldots, m, \ k = 0, 1, 2 \ldots.$$

*Пусть*

*1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{k,i}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;*

*2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров $n$ таких, что число $r_{n+1,i}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{0,i}, \ldots, r_{n,i}$ и чисел $r_{l,j}$ при любых $l$ и при $j \neq i, \ j = 1, \ldots, m$;*

*3) для любого $i = 1, \ldots, m$ и для любого $k$ верно, что если $\varphi(a_{k,i}) = (b_1, \ldots, b_n)$, где $b_1 \in \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}_{p_n}$, то ${}_{p_1}b_1 = 0, \ldots, {}_{p_n}b_n = 0$.*

*Тогда числа $\alpha_i$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы $\Omega_g$.*

Таким образом можно обобщить некоторые результаты на случай $g$-адических чисел.

# Список литературы


[1] *Коблиц Н.* $p$-адические числа, $p$-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1982.

[2] *Mahler K.* $p$-adic numbers and their functions; second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[3] *Чирский В.Г.* Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовыми нормированиями. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000.

[4] *Y. Amice.* Les nombers $p$-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

[5] *K. Mahler.* Uber transzendente $p$-adische Zahlen, Compos. Math. 1935. - V. 2. - P. 259-275.

[6] *W. Adams.* Transcendental numbers in the $p$-adic domain, Amer. J. Math. - 1966. - V. 88. - 279-307.

[7] *P. Bundschuh, V.G. Chirskii.* On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I. Arch.Math., 79(2002), 345-352.

[8] *P. Bundschuh, V.G. Chirskii.* On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II. ActaArithm., 113.4(2004), 309-326.

[9] *P. Bundschuh, V.G. Chirskii.* Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$. Moscow Journ. of Comb. and Number Th.,2015, vol.5, iss.1-2, 14-20.

[10] *V.G. Chirskii.* Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$. Russian Journ. of Math. Physics. v.20,2,2013, 149-154.