Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О регуляризации по Миллионщикову показателя Перрона многомерных линейных дифференциальных систем

Гаргянц Александр Георгиевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: gaaaric@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с её непрерывной *ограниченной* функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ множество всех решений системы A, а через $\mathcal{S}_*(A)$ —множество её ненулевых решений, и положим $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$, и $\mathcal{S}_* = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [4, 5]. Под *показателем Перрона* $\pi:\ \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ будем понимать функцию

$$\pi(x) = \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \quad x \in \mathcal{S}_*, \qquad \pi(0) = -\infty.$$

Показателем Перрона системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовём сужение π_A этой функции на пространство $\mathcal{S}(A)$.

Определение 2 [6]. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{M}^n$. Тогда для всякого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ назовём

$$\pi_{\bar{i}}(A) = \inf_{L \in \mathcal{G}_i} \sup_{x(0) \in L \setminus 0} \pi_A(x) \qquad \text{и} \qquad \pi_{\underline{i}}(A) = \sup_{L \in \mathcal{G}_{n-i+1}} \inf_{x(0) \in L \setminus 0} \pi_A(x)$$

верхним и нижним соответственно i-ыми *регуляризованными по Миллионщикову* показателями Перрона системы A, где $\mathcal{G}_i$ — множество линейных i-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

В определении 2 представлены два естественных способа выделить среди полного перроновского спектра системы (который может быть континуальным и крайне сложно устроенным подмножеством в $\mathbb{R}$ [1, 4]) конечное число характеристических в известном смысле значений, связанных с поведением показателя Перрона на i-мерных подпространствах и подмногообразиях в $\mathbb{R}^n$.

В случае показателя Ляпунова аналогичные два способа регуляризации совпадают друг с другом и дают в точности все с учётом кратностей [2, с. 61–62] значения ляпуновского спектра системы. В докладе [6] утверждается, что для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{M}^n$ верно

$$\pi_{\bar{i}}(A) = \pi_{\underline{i}}(A) \text{ для } i = 1, n, \quad \text{и} \quad \pi_{\bar{i}}(A) \geqslant \pi_{\underline{i}}(A) \text{ для } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

причём в случае диагонализуемых ляпуновскими преобразованиями [5, с. 138] систем все нестрогие неравенства обращаются в равенства. Вопрос о совпадении некрайних верхних и нижних регуляризованных показателей Перрона для любых ограниченных систем был поставлен в докладе [6].

Отрицательный ответ на этот вопрос для трёхмерных систем был дан в докладе [3]. А именно, утверждалось: существует трёхмерная ограниченная система, для которой между верхним и нижним показателем Перрона в единственной паре некрайних регуляризованных показателей $\pi_{\bar{2}}$ и $\pi_{\underline{2}}$ реализуется строгое неравенство. Однако вопрос о существовании n-мерных систем, $n > 3$, для которых в *каждой* паре некрайних регуляризованных показателей Перрона *одновременно* реализуются строгие неравенства, оставался открытым. Положительный ответ на него предоставляет

Теорема 1. Для всякого $n \geqslant 3$ найдётся бесконечно дифференцируемая ограниченная система $A \in \mathcal{M}^n$, такая что для неё выполнена цепочка:

$$\pi_{\overline{1}}(A) = \pi_{\underline{1}}(A) < \pi_{\underline{2}}(A) < \ldots < \pi_{\underline{n-1}}(A) < \pi_{\overline{2}}(A) < \ldots < \pi_{\overline{n-1}}(A) < \pi_{\underline{n}}(A) = \pi_{\overline{n}}(A).$$

Источники и литература

1) Барабанов Е. А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №11.
2) Былов Б. Ф, Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.:Наука, 1966.
3) Гаргянц А. Г. К вопросу о регуляризации показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №6. С. 845-846.
4) Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.
5) Изобов Н. А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. №4. С. 469-477.
6) Сергеев И. Н. // Международная конференция, посвященная 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 199-200.

Слова благодарности

Выражаю благодарность Сергееву Игорю Николаевичу и Быкову Владимиру Владиславовичу, без которых настоящая работа не была бы доведена до конца, а также Гаргянц Лидии Владимировне за моральную поддержку.