Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Порядок средней мощности плоских схем при неравномерном распределении вероятностей на входах.

Калачев Глеб Вячеславович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: gleb597@yandex.ru

Плоская схема — это схема из функциональных элементов, уложенная на плоскость так, чтобы каждому входу и выходу соответствовала некоторая сторона клетки, в которой находится элемент. Таким образом, в такой схеме могут использоваться любые функциональные элементы, у которых в сумме не более четырех контактов. Кравцов С.С. в работе [1] показал, что порядок площади плоских схем, реализующих булевы функции от n переменных, равен 2^n. Мы в качестве меры сложности будем рассматривать максимальную, а также среднюю мощность, выделяемую схемой, когда на ее вход подается случайная последовательность с заданным распределением вероятностей. В работе [2] было показано, что если рассматривать равномерное распределение вероятностей, то порядок функции Шеннона мощности плоских схем, реализующих функции от n переменных, равен $2^{n/2}$.

В этой работе исследуется порядок функции Шеннона максимальной мощности плоских схем для класса функций, имеющих заданное количество единиц. Результаты для этого класса позволяют получить оценки для средней мощности плоских схем при заданном распределении вероятностей на множестве входных наборах.

Чтобы сформулировать результаты, введем несколько определений. Рассмотрим плоскую схему K, реализующую булеву функцию от n переменных. Входы схемы K, а также выходы всех ее элементов назовем *узлами* схемы K. Функцию, реализуемый схемой K обозначим f_K. *Потенциалом* схемы K *на наборе* x назовем количество узлов схемы K, принимающих значение 1, когда на вход схемы подан набор x, будем обозначать эту величину $u_K(x)$.

Максимальным потенциалом схемы K назовем величину $\widehat{U}(K) = \max\limits_{x\in\{0,1\}^n} u_K(x)$.

Максимальным потенциалом булевой функции f назовем величину $\widehat{U}(f) = \min\limits_{K:f_K=f} \widehat{U}(K)$.

Средним потенциалом схемы K при распределении вероятностей P на множестве входных наборов назовем величину $U_P(K) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{x\in\{0,1\}^n} u_K(x)$.

Средним потенциалом булевой функции f при распределении вероятностей P на множестве входных наборов назовем величину $U_P(f) = \min\limits_{K:f_K=f} U_P(K)$.

В случае равномерного распределения индекс P будем опускать.

Введем функцию Шеннона для максимального потенциала функций из класса $\mathcal{F}$:

$$\widehat{U}(\mathcal{F}) = \max_{f\in\mathcal{F}} \widehat{U}(f),$$

а также для среднего потенциала на множестве всех функций от n переменных

$$U_P = \max_{f\in P_2(n)} U_P(f).$$

За F_d^n обозначим класс функций от n переменных, принимающих значение 1 не более, чем на d наборах.

Теорема 1. *Если $d \geq n^2$, то*

$$\widehat{U}(F_d^n) \asymp \sqrt{d(n - \log_2 d)} \text{ при } n \to \infty.$$

Чтобы сформулировать следующую теорему, нам понадобится еще несколько обозначений. Пусть на множестве $\{0,1\}^n$ задано распределение вероятностей P. Упорядочим элементы множества в порядке убывания вероятностей и обозначим вектор их вероятностей $M(P) := (p_1, p_2, ..., p_{2^n})$, где $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_{2^n}$.

Теорема 2. *Для произвольной последовательности векторов $\left(m^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, $m^{(n)} = (m_1^{(n)}, ..., m_{2^n}^{(n)})$ такой, что $m_1^{(n)} \geq m_2^{(n)} \geq ... \geq m_{2^n}^{(n)}$, $\sum_{i=1}^{2^n} m_i^{(n)} = 1$, $\sum_{i=1}^{n^2} m_i^{(n)} \leq 1/2$ верны утверждения*

1) *для любого распределения $P^{(n)}$ такого, что $M(P^{(n)}) = m^{(n)}$, верна асимптотическая оценка*

$$\sum_{j=1}^{2^n} m_j \sqrt{j} \preccurlyeq U_{P^{(n)}} \preccurlyeq \sum_{j=1}^{2^n} m_j \sqrt{j(n - \log_2 j)} \text{ при } n \to \infty;$$

2) *доля таких распределений $P^{(n)}$, для которых*

$$U_{P^{(n)}} \asymp \sum_{j=1}^{2^n} m_j \sqrt{j(n - \log_2 j)},$$

стремится к 1 при $n \to \infty$.

Источники и литература

1) Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. Проблемы Кибернетики. Вып.19. — М.:Наука, 1967.— С. 285—293.

2) Калачев Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49–74.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.