Секция «Геометрия и топология»

Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений. Суботношение Штейнера.

Степанова Екатерина Ивановна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ekfila@gmail.com

Проблема Штейнера состоит в том, чтобы для некоторого конечного множества в метрическом пространстве построить кратчайшее дерево, соединяющее все эти точки, — минимальное дерево Штейнера, обозначаемое через SMT.

Одно из обобщений задачи Штейнера — задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства, возникшая совсем недавно в работе А. О. Иванова и А. А. Тужилина [2] и основанная на идее М. Громова о минимальном заполнении риманого многообразия. Требуется найти взвешенный граф наименьшего веса, соединяющий конечное метрическое пространство, с учетом определенных естественных условий на веса ребер. Полученное минимальное заполнение обозначается через MF.

Для конечного подмножества плоскости, состоящего более чем из одного элемента, мы можем построить как минимальное дерево Штейнера, так и минимальное заполнение, а оценить связь между ними можно с помощью суботношения Штейнера — отношения веса минимального заполнения к длине минимального дерева Штейнера. Взяв инфимум суботношения по какому-то классу конечных подмножеств R2, мы получим числовую характеристику R2. В докладе рассматривается класс четырехточечных подмножеств.

Фиксируем треугольник A1A2A3, являющийся выпуклой оболочкой четырехточечного множества, а оставшейся точке A4 разрешим занимать произвольное положение внутри него или на его границе. Треугольник A1A2A3 разбивается на области в зависимости от того, какая топология минимального дерева Штейнера реализуется при каждом возможном положении точки A4. Аналогично можно рассмотреть разбиение треугольника A1A2A3 на области в зависимости от топологии минимального заполнения множества {A1, A2, A3, A4}. В докладе будет приведено полное описание областей постоянства множества топологий SMT и MF. Также будет дано полное описание того, как устроены топологии минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехугольников на плоскости.

Также строится бифуркационная картина топологий указанных деревьев в случае выпуклой четырехточечной границы. Указываются ограничения на класс кривых, в котором лежат кривые, разделяющий разные области на бифуркационной диаграмме, построенной для любого конечного числа точек границы.

Опираясь на бифуркационную картину топологий минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых множеств, можно получить следующий результат.

Теорема. *Для любых четырех точек евклидовой плоскости Штейнера больше или равно корню из трех пополам, причем эта граница достигается только для множества точек, лежащих в вершинах равнобедренных трапеций, у которых основания видны из точки пересечения диагоналей под углом 60 градусов.*

Этот результат показывает, что четырехточечное суботношение Штейнера равно трехточечному, вычисленному А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [2]. Найдены все конфигурации, на которых четырехточечное суботношение Штейнера достигается.

Источники и литература

1) Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. М.;Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2003.
2) Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. 203, No5, 65 — 118.
3) Yiu P. Introduction to the geometry of the triangle. Florida Atlantic University Lect. Notes, 2001.
4) Акопян А. В. Геометрия в картинках. М.: МЦНМО, 2011.
5) Kimberling C. Encyclopedia of triangle centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

Слова благодарности

Выражаю благодарность А. А. Тужилину и А. А. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А. Б. Жеглову и Д. П. Ильютко за полезные замечания.