Секция «Геометрия и топология»

Обобщенный комбинаторный поток Риччи на тетраэдре

Пепа Руслан Юрьевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: sheighd@gmail.com

Уже довольно давно в геометрии используются потоки метрик (т.е. дифференциальные уравнения на семейства метрик, зависящих от времени) — поток Риччи, поток средней кривизны и т.п. На двумерных замкнутых ориентированных поверхностях потоки Риччи также изучались[4]. Имеется несколько подходов к дискретизации потоков Риччи. В работе обсуждается наиболее естественные, с точки зрения геометрии, дискретизация потока Риччи в двумерном случае. Пусть задана триангуляция некоторой двумерной замкнутой поверхности T. Перенумеруем каким-либо образом вершины многогранника. Для ребра, соединяющего вершины с номерами i и j, выберем число $w_{ij} = w_{ji} \in [0, 1]$. Наконец, в каждой вершине зафиксируем положительное число r_i. Набор данных состоящий из триангуляции T, набора весов $W = \{w_{ij}\}$ и набора положительных чисел $R = \{r_i\}$ определяет на многограннике метрику следующим образом. Длину ребра l_{ij}, соединяющего вершины i и j, определим по формуле $l_{ij}^2 = {r_i}^2 + {r_j}^2 + 2r_ir_jw_{ij}$. Заданные таким образом длины ребер многогранника определяют плоские углы всех граней. Далее, гауссова кривизна многогранника с евклидовой метрикой на гранях сконцентрирована в его вершинах и определятся формулой

$$K_i = 2\pi - \sum_j \alpha_{ij},$$

где i — номер вершины, а α_{ij} — все плоские углы в вершине i. **Определение 1.** *Дискретным потоком Риччи* называется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_ir_i,$$

где триангуляция T и веса w считаются фиксированными.

В статье [2] доказано, что для любого набора неотрицательных w_{ij} и при некоторых ограничениях на триангуляцию существует и притом единственная метрика постоянной кривизны. Далее, в статье [3] показано, что при неотрицательных w_{ij} для любых начальных условий нормализованный поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны тогда и только тогда, когда эта метрика существует для данных (T, W).

В этой работе рассматриваются примеры триангуляций с весами, которые могут принимать и отрицательные значения. А именно, рассматриваются примеры весов на тетраэдре, обладающие симметрией. Первый пример — тетраэдр с весами $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \alpha, w_{23} = w_{21} = w_{31} = \gamma$, а второй — тетраэдр с весами $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{21} = w_{31} = \gamma$. В каждом из этих случаев в зависимости от значений весов было исследовано количество метрик постоянной кривизны, т.е. стационарных точек нормализованного потока Риччи. Полученный результат для первого тетраэдра показан на рис. 1), а для второго — на рис. 2). Число, написанное внутри каждой области, равно числу метрик постоянной кривизны для значений параметров, принадлежащих данной области. Уравнения линий, ограничивающих все эти области получены аналитически, и во всех случаях являются прямыми и параболами.

На рис. 3 изображены интегральные траектории потока Риччи для случая $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \alpha, w_{23} = w_{21} = w_{31} = \gamma$, при $\alpha = -0.8, \gamma = -0.6$, спроектированные на плоскость

$r_0 = 1$. На рисунке отмечены четыре положения равновесия, одно из которых является устойчивым, а три других, расположенных симметрично, нет.

Источники и литература

1) W. P. Thurston The Geometry and Topology of Three-Manifolds. — Electronic version 1.1 - March 2002, http://www.msri.org/publications/books/gt3m/
2) A. Marden, B. Rodin On Thurston's Formulation and Proof of Andreev's Theorem. — Computational Methods and Function Theory, 1990, Lecture Notes in Mathematics 1435, pp. 103-115.
3) B. Chow, F. Luo Combinatorial Ricci Flows on Surfaces. — J. Differential Geometry, 63, 2003, 97-129.
4) J. Isenberg, R. Mazzeo, N. Sesum Ricci Flow in Two Dimensions — Surveys in Geometric Analysis and Relativity, 2011, Advanced Lectures in Mathematics, Vol. 20, pp. 259–280

Иллюстрации

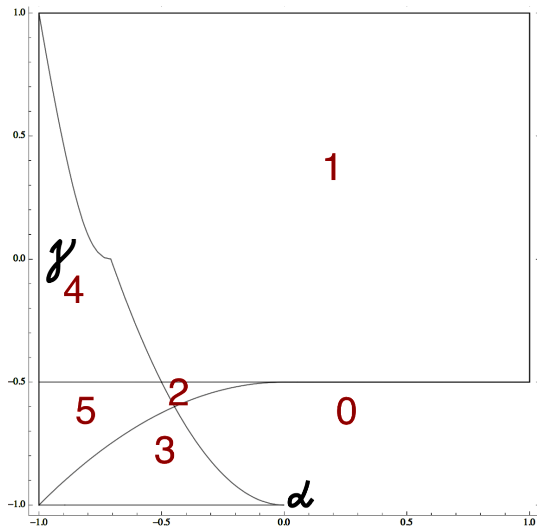

Рис. 1. Число метрик постоянной кривизны в зависимости от (α, γ)

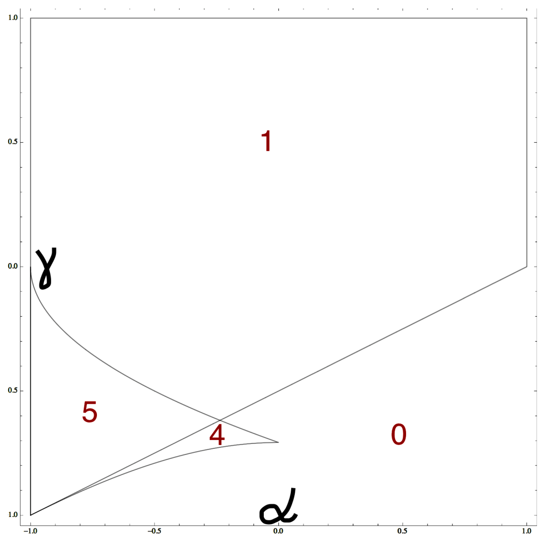

Рис. 2. Число метрик постоянной кривизны в зависимости от (α, γ)

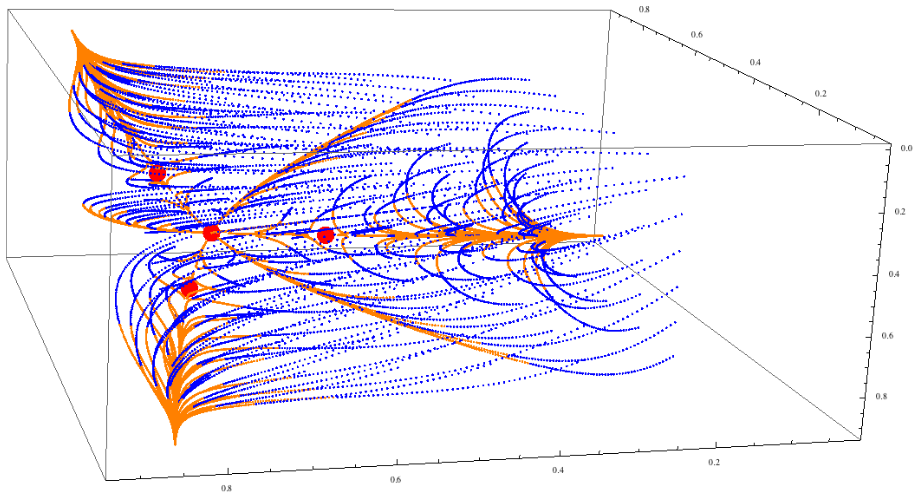

Рис. 3. Интегральные траектории комбинаторного потока Риччи.