Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Непрерывные сужения измеримых полилинейных отображений

Юрова Екатерина Владимировна

Выпускник (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: yurova-k@rambler.ru

Известно, что для измеримого линейного функционала A на сепарабельном пространстве Фреше X с центрированной гауссовской мерой γ верны следующие два утверждения: (см. [1] и [2]).
(i) A почти всюду является поточечным пределом последовательности непрерывных линейных функционалов,
(ii) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в X, и непрерывный линейный функционал $\widetilde{A}\colon E \to \mathbb{R}$, почти всюду совпадающий с A.
Заметим, что для любой борелевской меры свойство (ii) влечет свойство (i) (см. [3], теорема 8.6.26 или [4], лемма 2).
Возникает естественный вопрос, выполняются ли эти свойства или их аналоги для измеримых полилинейных функций. Можно рассматривать этот вопрос для более сильного условия (ii) или для более слабого условия (i).
Существует даже два естественных обобщения первой задачи (т.е. относящейся к свойству (ii)) для полилинейных форм

$$B(x_1, \ldots, x_n)\colon\ X \times X \times \cdots \times X \to \mathbb{R},$$

где предполагается, что X^n наделено произведением n копий меры γ:
(a) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и непрерывная полилинейная форма

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon\ L \times \cdots \times L \to \mathbb{R},$$

такие, что $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in L \times \cdots \times L$;
(b) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \cdots \times X$, и непрерывная билинейная форма

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon E \to \mathbb{R},$$

такие, что $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Теорема 1. *Для всех $n > 1$ свойства (a) и (b) равносильны. Однако даже для случая $n = 2$ они не равносильны естественному аналогу свойства (i), то есть они не равносильны существованию последовательности непрерывных форм, сходящихся к B почти всюду относительно произведения мер.*

Источники и литература

1) V. I. Bogachev, Gaussian Measures, American Mathematical Society, 1998.
2) Е.В. Юрова, О непрерывных сужениях линейных измеримых операторов, Докл. РАН, 443(3), 2012, 300–303.
3) В.И. Богачев, О.Г. Смолянов, Действительный и функциональный анализ: университетский курс, Москва – Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
4) Х. Шефер, Топологические векторные пространства, М., Мир, 1975.