Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Динамика функции Вигнера

Буркацкий Максим Олегович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: maks.burkackij@gmail.com

В сообщении обсуждается представление решения уравнения эволюции функции Вигнера с помощью формулы Фейнмана. При этом рассматривается функция Вигнера как изолированной так и открытой системы.

Функция Вигнера впервые балы введена в 1932 г. Ю. Вигнером в работе [5] следующим образом: пусть $E = Q \times P$ ($\mathrm{dim}Q = \mathrm{dim}P = n$) - фазовое пространство классической гамильтоновой системы, T - ядерный неотрицательный оператор в $L_2(Q)$ с единичным следом и интегральным ядром ρ_T (такие операторы будем называть операторами плотности), тогда функция Вигнера W_T, соответствующая оператору T задается равенством

$$W_T(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_Q \rho_T\left(q - \frac{r}{2}, q + \frac{r}{2}\right) e^{irp} dr.$$

Другие (эквивалентные) определения функции Вигнера можно найти в работе В.В. Козлова и О.Г. Смолянова [2].

Пусть функция Гамильтона классической системы задается равенством $H(q,p) = -\frac{p^2}{2} + V(q)$, где V - ограниченна. Пусть $T(t)$ - оператор плотности в момент времени $t \geq 0$ и $W_{T(t)}$ - соответствующая ему функция Вигнера. Введем обозначения $M = \{\varphi : \varphi \in L_2(Q\times Q) \cap C^2(Q\times Q), \nabla_q \nabla_{\bar{q}} \varphi \in L_2(Q\times Q),$ причем $\varphi, |\nabla_q \varphi|, |\nabla_{\bar{q}}\varphi| -$ограничены на $Q\times Q\}$; $\mathcal{F}_p$ - преобразование Фурье в $L_2(Q\times P)$ по переменной p; $\mathbf{E} := (Q\times Q)\times(P\times P)$ и $\mathcal{H} : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$, такая что $[(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto -p_1 p_2 + V(q_1 - \frac{q_2}{2}) - V(q + \frac{q_2}{2})]$. Уравнение динамики функции Вигнера можно преобразовать в уравнение типа Шредингера, причем для его решения справедливо следующие представление (формула Фейнмана)

Теорема 1. *Пусть W_0 - функция Вигнера в начальный момент времени $t = 0$, причем $\mathcal{F}_p W_0 \in M$. Тогда при любом $t > 0$ для $W_{T(t)}$ выполненно равенство:*

$$W_{T(t)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2nN}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_Q \underbrace{\int_{\mathbf{E}} \dots \int_{\mathbf{E}}}_{N} \exp\left(i \sum_{k=0}^{N-1} \bar{p}_{2k+1}(\bar{q}_{2k} - \bar{q}_{2k+2})\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{it}{N} \sum_{k=0}^{2N-2} \mathcal{H}(\bar{q}_k, \bar{p}_{k+1})\right) (\mathcal{F}_p W_0)(\bar{q}_{2N}) \exp(-ip_0 q_0') d\bar{q}_N d\bar{p}_N \dots d\bar{q}_1 d\bar{p}_1 dq_0',$$

где предел берется в $L_2(Q \times P)$ по переменным $(q_0, p_0) \in Q \times P$, $\bar{q}_j = (q_j, q_j') \in Q \times Q$ и $\bar{p}_j = (p_j, p_j') \in P \times P$, $j = 0 \dots 2N$.

Если H_1 - гильбертово пространство состояний квантовой системы, называемой (как и ее классический аналог) открытой, и H_2 - гильбертово пространство другой квантовой системы, называемой окружением, тогда гильбертово пространство H состояний образованной ими сложной системы представляет собой гильбертово тензорное произведение $H = H_1 \otimes H_2$ [1]. При этом состояние $\mathbf{T}$ сложной систем определяет состояние T_1 открытой системы, последние называется редукцией состояния $\mathbf{T}$, а W_{T_1} - редуцированной функцией Вигнера (функцией Вигнера открытой системы).

Пусть Q_1 конфигурационное пространство соответствующей классической открытой системы, а Q_2 конфигурационное пространство классической версии окружения, P_1 и P_2 пространства импульсов соответственно. В сообщении предполагается, что Q_1 и Q_2 конечномерные, вещественные, евклидовы пространства и $H_1 = L_2(Q_1)$, $H_2 = L_2(Q_2)$ при этом $H = L_2(Q_1 \times Q_2)$. Положим $\mathbf{Q} = Q_1 \times Q_2$ и $\mathbf{P} = P_1 \times P_2$. Пусть динамика системы задается некоторым самосапряженным оператором $\mathsf{H} : H \ni D(\mathsf{H}) \to H$. Тогда при каждом $t \geq 0$ заданы операторы $\mathbf{T}(t)$, $T_1(t)$ и соответствующие им функции $W_{\mathbf{T}(t)}$, $W_{T_1(t)}$, причем справедлива

Теорема 2. *Если при $t \geq 0$ функция $W_{\mathbf{T}(t)}$ лежит в $L_1(\mathbf{Q} \times \mathbf{P})$, тогда в $L_2(Q_1 \times P_1)$ выполненно равенство:*

$$W_{T_1(t)} = \int\limits_{P_2}\int\limits_{Q_2} W_{\mathbf{T}(t)} dq_2 dp_2.$$

Источники и литература

1) Дж. Гоф., Т. С. Ратью, Смолянов О.Г. "Фейнамановские, вигнеровские и гамильтоновы структуры, описывающие динамику открытых квантовых систем". Доклады РАН. 51.
2) Козлов В. В., Смолянов О. Г., "Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц". Теория вероятностей и приложения. 51 (1), 1-13, 2006.
3) Купш.И, Смолянов О.Г. “Точные управляющие уравнения, описывающие редуцированную динамику функции Вигнера”. Фундамент. и прикл. матем. 12 (5), 203 - 219, 2006.
4) Moyal J.E. “Quantum mechanics as a statistical theory”, Proc. Cambridge Philos. Soc vol. 45, 99-124, 1949.
5) E. Wigner "On the quantum correctionfor thermodynamicequilibrium Phys. Rev., 1932, v. 40, p. 749 - 759.

Слова благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю, Смолянову Олегу Георгиевичу, за постановку задачи и помощь в подготовке доклада.