Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Метрики на пространствах вероятностных мер

Борисович Василий Мокин

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: mokin93@ya.ru

Пусть на метрическом пространстве (U, d) задана неотрицательная функция стоимости $c(x, y)$. Обозначим через $\hat{\mu}_c$ и $\mathring{\mu}_c$ функционал Канторовича и функционал Канторовича – Рубинштейна:

$$\hat{\mu}_c(P_1, P_2) = \inf_{Q_x = P_1, Q_y = P_2} \int\limits_{U\times U} c(x, y) dQ, \qquad \mathring{\mu}_c(P_1, P_2) = \inf_{Q_x - Q_y = P_1 - P_2} \int\limits_{U\times U} c(x, y) dQ.$$

Очевидно, что $\mathring{\mu}_c \leqslant \hat{\mu}_c$. Основная задача этой работы — оценить $\mathring{\mu}_c$ через $\hat{\mu}_c$ снизу для некоторых пространств. Для пространства $\mathbb{R}$ с функцией $c(x, y) = |x-y| max(1, |x|^{p-1}, |x|^{p-1})$ такая оценка была получена в работе [1] (теорема 6.4.1), однако представленное в ней доказательство не обобщается на общий случай, рассмотренный в этом докладе.

Пусть ϕ — 1-липшицева функция на U. Будем рассматривать функции стоимости вида $c(x, y) = d(x, y)k(\phi(x), \phi(y))$, где $k(s, t)$ — неотрицательная симметричная функция, неубывающая по обоим аргументам $s, t \in \mathbb{R}$.

Введём функцию b на $\mathbb{R}^2$, множество G и функцию β на G следующим образом:

$$b(s, t) = \sup \left\{ |f(s) - f(t)| \;\middle|\; f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \right\},$$

$$G = \{(\phi(x), \phi(y), d(x, y)) \mid x, y \in U\},$$

$$\beta(s, t, l) = \inf \left\{ \frac{b(s, v) + b(t, v)}{k(s, t) l} \;\middle|\; v \leqslant \frac{s + t - l}{2} \right\}.$$

Теорема 1. $\mathring{\mu}_c \geqslant \left(\inf\limits_{(s,t,l)\in G} \beta(s, t, l) \right) \hat{\mu}_c$.

Пусть далее ϕ имеет вид $\phi(x) = \phi_a(x) = d(x, a)$ при некотором фиксированном $a \in U$.

Теорема 2. *Если существуют такие* $\alpha > 1$ *и* $\varepsilon > 0$*, что для всякого* $t \geqslant 0$ *выполняется* $k(0, t) \geqslant \varepsilon k(\alpha t, \alpha t)$*, то* $\mathring{\mu}_c \geqslant \frac{\varepsilon}{2(1 - \log_\alpha \varepsilon)} \hat{\mu}_c$.

Источники и литература

1) Rachev S. T. Probability metrics and the stability of stochastic models. John Wiley & Sons, Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore, 1991.